POSGRADO EN CIENCIAS (ASTRONOMÍA)
Examen de Admisión
para ingresar al semestre 2007-II
28 de Noviembre, 2006

El tiempo del examen es de 3 horas. Selecciona 6 problemas, donde al menos uno debe corresponder a cada tema.
Responde las preguntas en hojas separadas (por una sola cara) y no olvides escribir tu nombre en cada una de las hojas.

Mecánica Clásica

1. Sea una cadena de longitud total L_0, cuya masa por unidad de longitud es λ, y que cuelga del borde de una mesa horizontal de forma tal que una longitud l de la cadena cuelga libremente. Sea g la aceleración local de la gravedad y μ el coeficiente de fricción entre la mesa y la cadena (Supondremos que los coeficientes estático y dinámico son iguales).
   (a) Encontrar la longitud l^* del segmento que cuelga libremente, tal que para valores mayores la cadena empezará a caerse de la mesa partiendo del reposo.
   (b) Escribir la ecuación de movimiento que describe cómo se desliza la cadena mientras ésta todavia no ha abandonado por completo la mesa.
   (c) Resolver la ecuación de movimiento y encontrar la solución particular cuando al tiempo cero la cadena empieza a moverse desde $l = l^*$ con una velocidad inicial δv_o.

2. (a) Explicar qué es i) un sistema de referencia inercial; ii) un sistema de referencia no-inercial.
   (b) Explicar qué son las fuerzas no-inerciales, y discuta ejemplos que conoce.
   (c) Considere una partícula que se mueve a lo largo de una trayectoria descrita por $r(t)$, en coordenadas cilíndricas. Encuentre las componentes de velocidad y aceleración de la partícula en este sistema de coordenadas (todas las variables son función del tiempo t solamente). ¿Qué términos, si los hay, son de naturaleza no-inercial en la expresión para la aceleración?

3. Considera un corcho cilíndrico de masa m, radio a y altura h, flotando verticalmente en un recipiente de agua. En la posición de equilibrio, una parte h_0 del corcho esta inmersa en el agua. Empujamos el corcho hacia abajo, de manera que la altura del corcho inmersa se vuelve $(h_0 + \Delta h)$ (en vez de h_0 en la posición de equilibrio). Demuestra que, si ignoramos las fuerzas de fricción, el corcho va a efectuar oscilaciones armońicas de periodo

$$P = 2\pi\sqrt{\frac{m}{\pi a^2 \rho g}},$$

   donde ρ es la densidad volumétrica de masa del agua.

Termodinámica

1. Una nube esférica de hidrógeno molecular se contráe a presión constante hasta alcanzar un medio de su tamaño original ($R_f = R_i/2$). Si la nube inicialmente tenia una densidad de 100 particulas por cm^3 y una temperatura de $20\,K$, ¿cuál será la temperatura final de la nube? Si la contracción hubiera ocurrido adiabaticamente en vez de isobaricámente, ¿el gas hubiera alcanzado una temperatura final mayor o menor?

2. (a) Defina un gas ideal.
   (b) Defina un proceso reversible y dé un ejemplo en la naturaleza.

(c) Muestre que, para un gas ideal, un proceso adiabático satisface PV^x = constante, donde x es un número.

3. Considera un gas de N moléculas que solamente pueden ocupar dos estados de energía $E_1 = 0$ y $E_2 = E$. El peso estadístico del nivel 2 es cuatro veces mayor al del nivel 1 ($g_2 = 4g_1$).

   (a) ¿Cuál es el cociente N_2/N_1 entre la población del nivel 2 y la del nivel 1, como función de la temperatura T del gas?

   (b) ¿Cómo se comporta este cociente cuando $T \to 0$ y cuando $T \to +\infty$? Discute.

Electromagnetísmo y Optica

1. La ecuación de una onda esta dada por:

$$y(t) = 6\text{sen}(2\pi\frac{x}{10} + 4\pi t),$$

   donde x y y estan en centímetros y t en segundos. Encontrar (i) la amplitud, (ii) la longitud de onda, (iii) la frecuencia, (iv) la velocidad y (v) la dirección de propagación de la onda.

2. Se tiene una bobina con N vueltas enrollada en forma de un toroide circular. Calcule el campo magnético dentro del toroide.

3. (a) Demuestra, a partir de las ecuaciones de Maxwell, que el campo eléctrico de las ondas electromagnéticas en el vacío obedecen a la ecuación de onda:

$$\nabla^2 E - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 E}{\partial t^2} = 0$$

   (b) ¿Cuál es la solución general de esta ecuación?

Mecánica Cuántica

1. Considera un sistema cuyo estado y dos observables estan dados por,

$$|\psi(t)> = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad A = \frac{2}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 0\,1\,0 \\ 1\,0\,1 \\ 0\,1\,0 \end{pmatrix}, \quad y \quad B = \begin{pmatrix} 1\,0\,0 \\ 0\,0\,0 \\ 0\,0\,-1 \end{pmatrix},$$

   (a) ¿Cuál es la probabilidad de que una medición de A en tiempo t resulte en el valor -1?

   (b) Si primero se mide B y luego A inmediatamente después. Determina la probabilidad de encontrar un valor de 0 para B y un valor de 1 para A.

   (c) Si se hace al revés, midiendo primero A y luego B inmediatamente después, ¿Cuál es la probabilidad de encontrar un valor de 1 para A y 0 para B?

   (d) ¿Por qué las probabilidades de los dos incisos anteriores no son iguales?

2. Considere el modelo clásico planetario de Bohr (un electrón en órbita circular estable alrededor del protón, bajo pura atracción coulombiana) para el átomo de H. Cuantizando el momento angular a través del entero n ($L = n\hbar$), encuentre la energía de estados permitidos en términos de n, y las frecuencias de emisión y absorción asociadas. No considere emisión de radiación debida al electrón acelerado.

3. Considera una partícula de masa m y energía E, proveniente de $x = -\infty$ y moviéndose a lo largo del eje (Ox) de izquierda a derecha. En el origen del eje, existe una barrera de potencial de altura V_0 y ancho a:

$$V(x) = 0 \text{ si } x < -a/2 \text{ y } x > +a/2$$

$$V(x) = V_0 \text{ si } -a/2 < x < +a/2$$

(a) Si $E < V_0$, calcula la función de onda en toda posición de (Ox).

(b) ¿Cómo difiere este resultado cuántico del resultado del problema clásico equivalente?

Constantes útiles

Velocidad de la luz	c	3.00×10^{8} m s^{-1}
Carga del electrón	e	1.60×10^{-19} C
Masa del electrón	m_e	9.11×10^{-31} kg
Constante de Planck	h	6.63×10^{-34} J s^{-1}
	$\hbar$	1.054×10^{-34} J s^{-1}
Constante de gravedad	G	6.67×10^{-11} N m^2 kg^{-2}
Permitividad del vacío	ϵ_0	$8.85\, 10^{-12}$ N^{-1} m^{-2} C^2
Permeabilidad magnética del vacío	μ_0	1.26×10^{-6} m kg C^{-2}
Número de Avogadro	N_A	6.02×10^{23} mol^{-1}
Constante de Boltzman	k	1.38×10^{-23} J K^{-1}
Constante de los gases	R	8.31 J K^{-1} mol^{-1}
Magnetón de Bohr	$\mu_B = \frac{e\hbar}{2m_e c}$	5.788×10^{-9} eV G^{-1}.
Electrón volt	1 eV	1.602×10^{-19} J