POSGRADO EN CIENCIAS (ASTRONOMÍA)
Examen de Admisión
para ingresar al semestre 2008-I
19 de Junio 2007

El tiempo del examen es de 3 horas. Selecciona 6 problemas, donde al menos uno debe corresponder a cada tema. Responde las preguntas en hojas separadas (por una sola cara) y no olvides escribir tu clave en cada una de las hojas.

Mecánica Clásica

1. Consideramos una esfera homogénea S de radio R y masa total M, y nos proponemos obtener una expresión para su energía potencial gravitacional E_P en términos de M, R y G.

   (a) Calcula la densidad volumétrica ρ de la esfera S suponiendo que es uniforme.

   (b) Considera una subesfera S' concéntrica con S y de radio r ($r < R$). Calcula la masa $M(r)$ de dicha subesfera.

   (c) Obtén una expresión para la masa dm de una cáscara esférica de ancho dr y radio interno r.

   (d) Calcula el trabajo dW que se tiene que realizar para traer la cáscara del inciso anterior desde un radio r hasta el infinito. Por conveniencia, usa la variable de integración s e integra de $s = r$ hasta $s = \infty$.

   (e) Calcula el trabajo total que se tiene que realizar para llevar todas las cáscaras que conforman la esfera hasta el infinito (se integra de $r = 0$ hasta $r = R$). La magnitud de este trabajo es igual a la energía gravitacional de la esfera S.

2. Considera una partícula de masa m que se mueve en presencia de un potencial central $V(r)$.

   (a) Usando las coordenadas polares (r, θ) como coordenadas generalizadas, encuentra el Lagrangiano del sistema y las ecuaciones de Lagrange de este problema.

   (b) Encuentra ahora el Hamiltoniano del sistema y las ecuaciones de Hamilton.

3. Toma un objeto de masa m a una altura h del suelo y déjalo caer.

   (a) Calcula el promedio temporal de su energía cinética desde el inicio de su movimiento hasta que llega al suelo.

   (b) Calcula el promedio temporal de su energía potencial desde el inicio de su movimiento hasta que llega al suelo.

   (c) Escribe la relación que existe entre estos dos promedios. ¿Cómo se llama dicha relación?

Termodinámica

1. Una nube esférica de hidrógeno molecular se comprime hasta alcanzar la cuarta parte de su radio original. Suponiendo que es un gas ideal, calcula en qué factor aumentará la temperatura del gas en la nube si:

   (a) La compresión ocurre adiabáticamente

   (b) La compresión ocurre isotérmicamente

   Argumenta porqué una es mayor que la otra.

2. Los niveles de energía para las transiciones rotacionales de una molécula de hidrógeno son de la forma $E_j = 2hB_0 j(j+1)$, donde h y B_0 son constantes. Para un gas de hidrógeno que se encuentra en equilibrio termodinámico a $\mathbf{T} = 300$ K, calcula el porcentaje de moléculas en el segundo estado excitado relativo a la población del estado base.

3. Considera un gas ideal en un recipiente aislado. El gas está al principio solamente en un lado del recipiente, y el otro lado ha sido previamente evacuado. Los dos lados del recipiente tienen el mismo volumen. Cuando se abre una llave de paso que conecta ambos lados del recipiente, el gas se expande libremente hacia el lado inicialmente vacío.

   (a) ¿El proceso es adiabático, isotérmico, isobárico?

   (b) Usa la primera ley de la termodinámica para encontrar el cambio en la energía interna ΔU y el cambio en la temperatura T.

   (c) Traza este proceso en un diagrama P-V (presión P, volumen V)

   (d) ¿El proceso es reversible o irreversible? Calcula el cambio en la entropía S. ¿Es válida la ecuación $\Delta S = \int \delta Q/T$, evaluada de un estado inicial a uno final, donde Q es el calor? Discute la validez de la expresión que usas para calcular el cambio de entropía ΔS, en detalle.

Electromagnetismo y óptica

1. (a) Escribe las ecuaciones de Maxwell en el vacío, y demuestra que el campo eléctrico obedece la ecuación de onda:

$$\nabla^2 \mathbf{E} + \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 \mathbf{E}}{\partial t^2} = 0.$$

   (b) Considera una solución particular de esta ecuación de onda de la forma

$$\mathbf{E} = \mathbf{E_0} \cos(\mathbf{k}.\mathbf{r} - \omega t).$$

   Demuestra que el campo eléctrico $\mathbf{E}$ es perpendicular a $\mathbf{k}$.

2. Considera un solenoide de radio a_1 y longitud b_1 localizado dentro de otro solenoide de radio a_2 y longitud b_2. El número total de vueltas de solenoide interior es N_1 mientras que en el solenoise externo es N_2 (ver Fig. 1). Obtén una expresión para la inducción mutua M entre los dos solenoides. Supón que $a_1 \leq b_1$ y que $a_2 \leq b_2$ de modo que el campo magnético producido por un solenoide en su interior se puede expresar como:

$$B = \frac{\mu_0 N I}{L}$$

   Recuerda que para dos circuitos rígidos C_1 y C_2, el coeficiente de inductancia mutua M_12 guarda una relación entre los coeficientes de autoinductancia L_1 y L_2.

3. La pupila del ojo tiene un diámetro medio de 2.5 mm, durante el dia. ¿A qué distancia del ojo pueden ser colocados dos objetos, situados a 40 cm uno del otro, para que sea posible todavía su resolución. ($\lambda = 600$ nm)?

Mecánica Cuántica

1. Considera el ión de O^{+7}, que consta de un electrón y un núcleo de carga $Z = +8$.

   (a) Calcula la energía, E_n, y el radio de la órbita, r_n, correspondiendo al estado n. Calcula la separación energética entre los niveles $n = 1$ y $n = 2$. Deja el resultado en términos de constantes ($\hbar$, Z, e, μ).

(b) Aproximamos ahora el pozo del ión de O^{+7} como un pozo cuadrado infinito. Usa la masa reducida del electrón, μ, como la masa de la partícula en el pozo cuadrado. ¿Cuáles son las energías del electrón en este pozo? Si $a = 2r_n$, donde a es la extensión del pozo cuadrado y r_n es el radio de la órbita del ión de O^{+7}, ¿para aproximadamente cuál r_n es la separación energética entre los niveles $n = 1$ y $n = 2$ del pozo cuadrado igual a la separación energética entre los mismos niveles para el ión de O^{+7}?

2. Muestra que la velocidad de fase $v_\phi = \nu\ \lambda$ (donde ν es la frecuencia y λ la longitud de onda) para una partícula con masa en reposo mayor que cero es siempre mayor que c y que v_ϕ es una función de la longitud de onda λ.

   Sugerencia: usa $E^2 = m^2c^4 + p^2c^2$, con m masa en reposo y p el momento lineal.

3. Al tiempo t = 0 un oscilador lineal armónico está en un estado descrito por la función de onda normalizada Ψ :

$$\Psi(x, 0) = \sqrt{1/5}\ u_0(x) + \sqrt{1/2}\ u_2(x) + c_3\ u_3(x)$$

   donde $u_n(x)$ es la n-ésima eigenfunción independiente del tiempo para el oscilador.

   (a) Determina el valor numérico de c_3 suponiendo que es real y positiva.

   (b) Escribe la función de onda al tiempo t.

   (c) ¿Cuál es el valor esperado de la energía del oscilador a t = 0? a t = 1 segundos?

$$M_{12} = \sqrt{L_1 L_2}$$

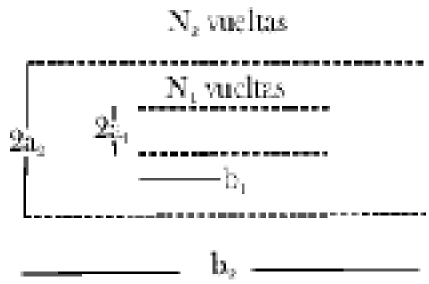

Fig. 1

Constantes útiles

Velocidad de la luz	c	3.00×10^8 m s^{-1}
Carga del electrón	e	1.60×10^{-19} C
Masa del electrón	m_e	9.11×10^{-31} kg
Constante de Planck	h	6.63×10^{-34} J s^{-1}
	$\hbar$	1.054×10^{-34} J s^{-1}
Constante de gravedad	G	6.67×10^{-11} N m^2 kg^{-2}
Permitividad del vacío	ϵ_0	$8.85\ 10^{-12}$ N^{-1} m^{-2} C^2
Permeabilidad magnética del vacío	μ_0	1.26×10^{-6} m kg C^{-2}
Número de Avogadro	N_A	6.02×10^{23} mol^{-1}
Constante de Boltzman	k	1.38×10^{-23} J K^{-1}
Constante de los gases	R	8.31 J K^{-1} mol^{-1}
Magnetón de Bohr	$\mu_B = \frac{e\hbar}{2m_e c}$	5.788×10^{-9} eV G^{-1}.
Electrón volt	1 eV	1.602×10^{-19} J