

POSGRADO EN CIENCIAS (ASTRONOMÍA)

Examen de Admisión
para ingresar al semestre 2008-II
27 de Noviembre 2007

El tiempo del examen es de 3 horas. Selecciona 6 problemas,
donde al menos uno debe corresponder a cada tema.

Responde las preguntas en hojas separadas (por una sola cara)
y no olvides escribir tu clave en cada una de las hojas.

Mecánica Clásica

1. Un cilindro de peso W y de área en su base igual a A , se sumerge en un líquido de densidad volumétrica ρ de modo que su eje mayor es perpendicular a la superficie del líquido. Se le da un pequeño empujón hacia abajo y este empieza a oscilar.
 - (a) Encuentra la ecuación de movimiento del cilindro.
 - (b) Encuentra una expresión para el período de oscilación en términos del peso W y del área de la base del cilindro A .
2.
 - (a) Encuentra una expresión algebraica para la velocidad de escape de un cuerpo esférico de masa M y radio R .
 - (b) Utilizando esta expresión, calcula la velocidad de escape de la Tierra ($M_{\oplus} = 6.0 \times 10^{24}$ kg, $R_{\oplus} = 6.4 \times 10^6$ m).
 - (c) ¿Qué radio deberá tener un objeto esférico de masa M para que su velocidad de escape sea igual a la velocidad de la luz c ?
 - (d) Utilizando esta expresión, calcula el radio que debería tener la Tierra para que su velocidad de escape sea igual a la de la luz.
3.
 - (a) Escribe la ecuación de movimiento de un objeto de masa m cuando se ve desde un sistema de referencia que gira con una velocidad angular ω (e.g. la Tierra).
 - (b) Identificar en esta ecuación los distintos términos de aceleración.

Termodinámica

1. Se mezcla una masa M de un líquido a temperatura T_1 con una masa igual del mismo líquido a temperatura T_2 . El sistema está aislado térmicamente, y los líquidos se mantienen a una presión (la atmosférica) constante. Mostrar que el cambio de entropía es

$$\Delta S = 2MC_p \ln \left(\frac{T_1 + T_2}{2\sqrt{T_1 T_2}} \right),$$

y que este cambio es necesariamente positivo.

2. En una situación física dada, la densidad de probabilidad de encontrar un electrón con una energía E es:

$$\begin{aligned} p(E) &= 0.2\delta(E + E_0) & E < 0 \\ &= 0.8\frac{1}{b}e^{-E/b} & E > 0 \end{aligned}$$

donde $E_0 = 1.5$ eV, and $b = 1.0$ eV.

(a) ¿Cuál es la probabilidad de que la energía sea mayor que 1.0 eV?

(b) ¿Cuál es la energía promedio del electrón?

NOTA: Recuerda que $\int_0^\infty x e^{-x} dx = 1$

3. Una ecuación de estado válida para un gas real es la ecuación de Van der Waals:

$$\left(p + \frac{a}{V^2}\right)(V - b) = NkT$$

donde a y b son dos constantes.

(a) Discute brevemente el sentido físico de estas dos constantes.

(b) Calcula el trabajo necesario para comprimir el gas de manera isotérmica de V_1 a V_2 (donde $V_2 < V_1$).

Electromagnetismo y óptica

1. Encuentra el potencial eléctrico $V(x)$ a lo largo del eje de simetría (eje x) producido por un anillo cargado uniformemente con una densidad lineal de carga λ .

2. Una rueda de radio R tiene una carga lineal λ en su circunferencia. Esta suspendida por una cuerda de tal forma que el plano de la rueda es horizontal. En la zona interior de la rueda hay un campo magnético uniforme, B_0 , desde el centro hasta un radio $a < R$. Apagamos el campo magnético. Calcula el momento angular final de la rueda, suponiendo que la rueda estaba inicialmente en reposo.

3. Un rayo de luz entra del aire (de índice óptico 1) en un material transparente. La superficie que separa el aire del material transparente es plana, y el ángulo de incidencia i es de 48° , mientras que el ángulo de refracción r es de 32° .

(a) ¿Cuánto vale el índice óptico en el material transparente?

(b) ¿Cuánto vale la velocidad de propagación de la luz en el medio transparente?

(c) ¿Puede darse el fenómeno de reflexión total cuando un rayo pasa del aire al medio transparente, o del medio transparente al aire? Cálculo en ángulo crítico correspondiente.

Mecánica Cuántica

1. (a) ¿Cuáles son todos los posibles valores del espín **total** de un conjunto de 3 electrones?

(b) ¿Cuál es el espín total del estado normalizado

$$\frac{1}{\sqrt{2}}(\uparrow_1 \downarrow_2 \uparrow_3 - \downarrow_1 \uparrow_2 \uparrow_3) ?$$

2. En este problema, nos proponemos tratar de manera semi-clásica el átomo de Helio (He).

(a) Considera primero el ion de Helio He^+ . Calcula el radio y la energía del estado base como función del radio de Bohr del hidrogeno $a_0 = 0.53 \text{ \AA}$ y de la energía del estado base del hidrogeno $E_0 = -13.6 \text{ eV}$.

(b) En el átomo de Helio completo, cualquiera de los dos electrones siente el potencial atractivo del núcleo, y el potencial repulsivo del otro electrón. En la aproximación semi-clásica, la estructura más estable sería aquella donde los dos electrones se encuentran en posiciones diametralmente opuestas relativamente al núcleo. Usando sus resultados del inciso anterior, estima la energía de repulsión entre los dos electrones.

(c) Combinando los dos incisos anteriores, estima las energías de primera y segunda ionización del Helio.

3. La función de onda del estado base de los hidrogenoides es:

$$\phi_0 = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \left(\frac{Z}{a_0} \right)^{1.5} \exp -\frac{Zr}{a_0}$$

- (a) ¿Cuál es la función de onda del estado base del tritio?
 (b) ¿Cuál es la función de onda del estado base de ${}^3\text{He}^+$?
 (c) Un electrón está en el estado base del tritio. Una reacción nuclear transforma instantáneamente el núcleo de tritio en un núcleo de ${}^3\text{He}^+$. Supón que la partícula β y el neutrino que se producen en esta reacción salen inmediatamente del sistema sin interactuar con el electrón. ¿Cuál es la probabilidad de que el electrón se quede en el estado base del ${}^3\text{He}^+$?

NOTA: Recuerda que $\int_0^\infty x^2 e^{-x} dx = 2$

Constantes útiles

Velocidad de la luz	c	$3.00 \times 10^8 \text{ m s}^{-1}$
Carga del electrón	e	$1.60 \times 10^{-19} \text{ C}$
Masa del electrón	m_e	$9.11 \times 10^{-31} \text{ kg}$
Constante de Planck	h	$6.63 \times 10^{-34} \text{ J s}^{-1}$
	\hbar	$1.054 \times 10^{-34} \text{ J s}^{-1}$
Constante de gravedad	G	$6.67 \times 10^{-11} \text{ N m}^2 \text{ kg}^{-2}$
Permitividad del vacío	ϵ_0	$8.85 \times 10^{-12} \text{ N}^{-1} \text{ m}^{-2} \text{ C}^2$
Permesabilidad magnética del vacío	μ_0	$1.26 \times 10^{-6} \text{ m kg C}^{-2}$
Número de Avogadro	N_A	$6.02 \times 10^{23} \text{ mol}^{-1}$
Constante de Boltzman	k	$1.38 \times 10^{-23} \text{ J K}^{-1}$
Constante de los gases	R	$8.31 \text{ J K}^{-1} \text{ mol}^{-1}$
Magnetón de Bohr	$\mu_B = \frac{e\hbar}{2m_e c}$	$5.788 \times 10^{-9} \text{ eV G}^{-1}$
Electrón volt	1 eV	$1.602 \times 10^{-19} \text{ J}$