POSGRADO EN CIENCIAS (ASTRONOMÍA)
Examen de Admisión
para ingresar al semestre 2009-I
16 de Junio 2008

Duracion del examen: 3 horas. Selecciona 6 problemas, donde al menos uno debe corresponder a cada tema.

Responde las preguntas en hojas separadas (por una sola cara) y no olvides escribir tu clave en cada una de las hojas.

Mecánica Clásica

1. Encuentra el periodo de oscilación (para oscilaciones pequeñas) de un disco de radio a con densidad superficial de masa uniforme ($\sigma = \frac{M}{\pi a^2}$) que se mueve en torno a un eje perpendicular al plano del disco y que pasa a una distancia $\frac{a}{2}$ del centro del disco (ver Fig. 1).

2. Una partícula de masa m se mueve bajo la influencia de una fuerza central atractiva $\mathbf{F} = -k\mathbf{r}$, con momento angular $\mathbf{L}$ constante (k y L son constantes positivas).

   (a) Escribe el Lagrangiano del sistema en coordenadas polares [Recuerda que la energía cinética en coordenadas polares es $T = \frac{1}{2}m(\dot{r}^2 + r^2\dot{\theta}^2)$].

   (b) ¿Para qué valor de la energía total describirá la partícula una órbita circular? y ¿cuál sería el radio de dicha órbita?

3. (a) Un electrón, cuya velocidad relativa a un observador en el laboratorio es de $0.8c$, es vista por otro observador que se mueve en la misma dirección del electron a una velocidad de $0.5c$ respecto al laboratorio. Calcula la energía cinética del electrón respecto a cada uno de los observadores.

   (b) La antena de un cohete espacial forma un ángulo de 10° respecto al eje del cohete. Si el cohete se mueve a una velocidad de $0.7c$ respecto a la tierra, ¿que ángulo forma la antena con el eje del cohete visto desde la tierra?

Termodinámica

1. A partir de las siguientes ecuaciones de estado para un gas ideal, $pV = NRT$ y $U = \frac{3}{2}NRT$, donde todas las letras tienen sus significados habituales, hallar la ecuación fundamental para la entropía en sus variables naturales.

2. (a) Utilizando la primera ley de la termodinámica y las definiciones de c_p y c_v, demuestra que

$$c_p - c_v = \left[p + \left(\frac{\partial U}{\partial V}\right)_T\right]\left(\frac{\partial V}{\partial T}\right)_P$$

   (b) Usando el resultado del inciso anterior con la relación

$$p + \left(\frac{\partial U}{\partial V}\right)_T = T\left(\frac{\partial P}{\partial T}\right)_V$$

   encuentra $c_p - c_v$ para un gas de van der Waals.

   [Recuerda que la ecuación de estado de un gas de van der Waals es $p = \frac{NRT}{V-Nb} - \frac{aN^2}{V^2}$.]

   (c) A partir del resultado anterior, demsuestra que cuando $V \to \infty$ a p constante, se obtiene la forma de $c_p - c_v$ para un gas ideal.

3. Considera un mol de gas inicialmente en un estado $1 = (p_1, V_1)$ y que se transforma hasta llegar a un estado $2 = (p_2, V_2)$ siguiendo el camino de la Fig. 2.

   (a) Queremos calcular el cambio de entropia $(S_2 - S1)$ del sistema. Justifica el hecho de que si lo calculamos para la secuencia (p_1, V_1) – (p_0, V_0) – (p_2, V_2), obtendremos el valor de $(S_2 - S1)$ valido para cualquier camino del estado 1 al estado 2.

   (b) Usando la secuencia (p_1, V_1) – (p_0, V_0) – (p_2, V_2), demuestra que

   $$S_2 - S_1 = c_p \ln\left(\frac{T_2}{T_1}\right) - R\ln\left(\frac{p_2}{p_1}\right)$$

   (c) Demuestra *explicitamente* que si los estados 1 y 2 están localizados sobre la misma curva adiabática entonces $P_1 V_1^\gamma = P_2 V_2^\gamma$ (donde $\gamma = c_p/c_v$).

   Nota: Puedes suponer que $c_p = c_v + R$, pero no puedes tomar un valor particular para c_v.

Electromagnetismo y óptica

1. (a) Escribe las ecuaciones de Maxwell (i) en el vacío y (ii) en presencia de materiales polarizables y magnetizables.

   (b) Demuestra que el campo eléctrico $\mathbf{E}$ y el campo magnético $\mathbf{B}$, en el vacio, satisfacen una ecuación de onda.

   [Recuerda que, para cualquier vector $\mathbf{F}$, se cumple $\nabla \times (\nabla \times \mathbf{F}) = \nabla(\nabla \cdot \mathbf{F}) - \nabla^2 \mathbf{F}$].

   (c) ¿Cuál es la velocidad de propagación de estas ondas (obtenla a partir de las ecuaciones de onda).

2. En la Fig. 3, se muestra un marco de metal con un extremo movible. Dicho extremo movible está perfectamente lubricado de modo que no existe ninguna fricción entre el brazo movible AD y el resto del marco. El marco está colocado verticalmente en la Tierra, de manera que el brazo AD se desliza hacia abajo bajo la influencia de la fuerza de gravedad. La masa del brazo AD es m y su longitud es l. Existe un campo magnetico H horizontal constante y uniforme, orientado perpendicularmente al marco metalico hacia la derecha (ver Fig. 3). La resistencia eléctrica de los segmentos AB, BC y CD es **cero**, mientras que la del brazo AD es R. Escójase un sistema de coordenadas en donde la variable de posición y se mide en forma positiva hacia abajo a partir del brazo BC. Supóngase que se suelta el brazo AD cuando ésta a la altura del brazo BC (o sea cuando $y = 0$). La acceleración de la gravedad es g.

   (a) Obtén una expresión para la corriente que circula en el circuito $ABCD$.

   (b) En el brazo AD, la corriente ¿va de A hacia D, o de D hacia A?

3. Una pupila dilatada tiene un tamanõ de 9mm. Si los faros de un coche estan separados 1.40 m y emiten luz monocromatica a $\lambda = 450$nm.

   (a) ¿Cual es la distancia maxima a la cual se pueden todavia resolver los 2 faros usando un solo ojo?.

   (b) ¿Hay alguna mejora en la resolucion si uno usa los 2 ojos? ¿Porque?

Mecánica Cuántica

1. Considera una partícula de masa m confinada en un pozo de potencial infinito unidimensional cuyas paredes se localizan en $x = 0$ y $x = 2a$.

   (a) Calcula la energía del primer nivel excitado.

   (b) Haz un esquema de las funciones de onda para los tres estados de más baja energía.

2. Al tiempo $t = 0$, un átomo de hidrógeno se encuentra descrito por la siguente función de onda:

$$\Psi(r,0) = \frac{4}{(2a_0)^{3/2}} \left[e^{-r/a_0} Y_0^0 + A e^{-r/2a_0} \left(-iY_1^1 + Y_1^{-1} + \sqrt{7} Y_1^0 \right) \right]$$

 (a) Considera la exuación radial que describe el átomo de hidrógeno en general, ¿cuál es el potencial efectivo al que está sujeto el sistema electrón-protón?
 (b) Dada la función $\Psi(r,0)$, calcula la constante de normalización A.
 (c) ¿Cuál es el valor esperado de $\mathbf{L}^2$?
 (d) ¿Es $\Psi(r,0)$ una eigenfunción de L_x? Explica tu respuesta.

Notas:

- $Y_l^m = Y_l^m(\theta, \phi)$ son los armónicos esféricos.
- Las primeras funciones radiales $R_n l(r)$ del átomo de hidrógeno son:

$$\begin{aligned}
R_{10} &= \frac{2}{a_0^{3/2}} e^{-r/a_0} \\
R_{20} &= \frac{2}{(2a_0)^{3/2}} \left(1 - \frac{r}{2a_0}\right) e^{-r/2a_0} \\
R_{21} &= \frac{1}{\sqrt{3}\,(2a_0)^{3/2}} \left(\frac{r}{a_0}\right) e^{-r/2a_0} \\
R_{30} &= \frac{2}{(3a_0)^{3/2}} \left(1 - \frac{2r}{3a_0} + \frac{2r^2}{27a_0^2}\right) e^{-r/3a_0} \\
R_{31} &= \frac{4\sqrt{2}}{3\,(3a_0)^{3/2}} \left(\frac{r}{a_0}\right) \left(1 - \frac{r}{6a_0}\right) e^{-r/3a_0} \\
R_{32} &= \frac{2\sqrt{2}}{27\sqrt{5}\,(3a_0)^{3/2}} \left(\frac{r}{a_0}\right)^2 e^{-r/3a_0}
\end{aligned}$$

3. Un positronio se forma por el estado ligado de un positrón (antielectrón) y un electrón. Es similar a un átomo de hidrógeno, pero en positrón sustituye al protón. Si en el positronio se da una transición del nivel $n = 3$ al $n = 1$, ¿cuánto vale la energía del fotón emitido? La masa del positrón es igual a las del electrón.

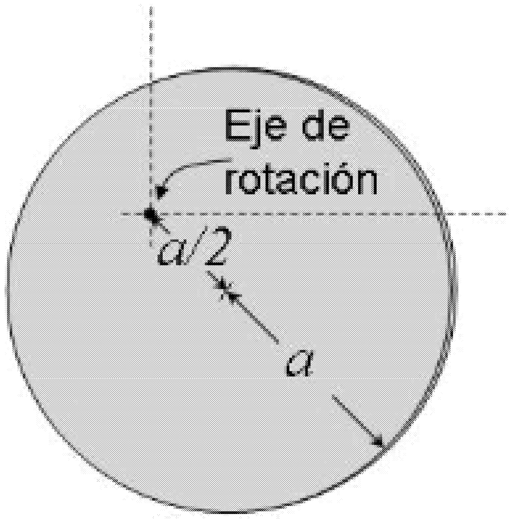

Fig. 1

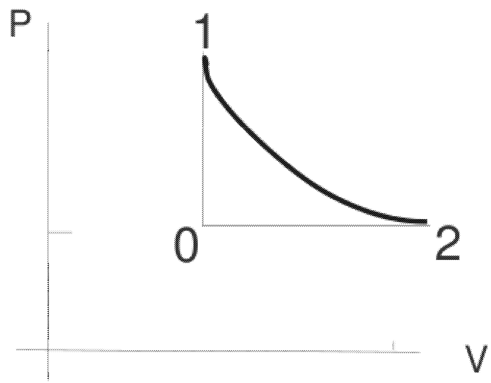

Fig. 2

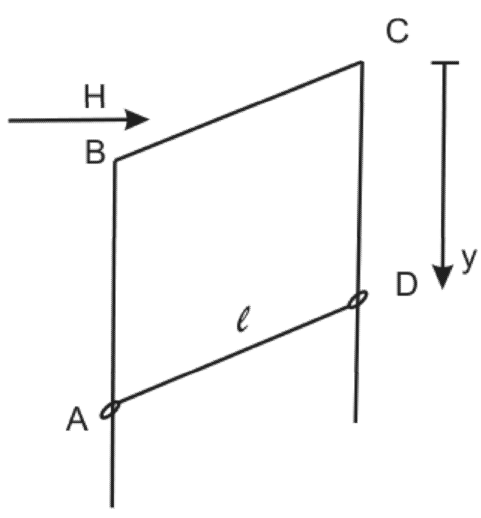

Fig. 3

Constantes útiles

Velocidad de la luz	c	3.00×10^{8} m s^{-1}
Carga del electrón	e	1.60×10^{-19} C
Masa del electrón	m_e	9.11×10^{-31} kg
Constante de Planck	h	6.63×10^{-34} J s^{-1}
	$\hbar$	1.054×10^{-34} J s^{-1}
Constante de gravedad	G	6.67×10^{-11} N m^{2} kg^{-2}
Permitividad del vacío	ϵ_0	$8.85\ 10^{-12}$ N^{-1} m^{-2} C^{2}
Permeabilidad magnética del vacío	μ_0	1.26×10^{-6} m kg C^{-2}
Número de Avogadro	N_A	6.02×10^{23} mol^{-1}
Constante de Boltzman	k	1.38×10^{-23} J K^{-1}
Constante de los gases	R	8.31 J K^{-1} mol^{-1}
Magnetón de Bohr	$\mu_B = \frac{e\hbar}{2m_e c}$	5.788×10^{-9} eV G^{-1}.
Electrón volt	1 eV	1.602×10^{-19} J