Instituto de Astronomía

y

Centro de Radioastronomía y Astrofísica

EXAMEN DE ADMISIÓN

Semestre 2011-II

(primavera del 2011)

a 25 de Noviembre de 2010

La duración del examen es de 6 horas en total, de 2 sesiones de 3 horas; una sesión matutina y otra vespertina.

La 1ra. sesión incluye los temas de Mecánica Clásica y Electromagnétismo, y la 2da. de Física Cuántica y Térmica.

Seleccione 2 problemas por tema.

Responda las preguntas en hojas separadas (por una sola cara).

No olvide escribir su clave asignada en cada una de las hojas.

Parte I

Mecánica Clásica y Electromagnétismo

Mecánica Clásica

1.) La energía potencial U a la que se encuentra sujeta una partícula de masa m es

$$U(r) = U_0 \left(\frac{r}{R} + \lambda^2 \frac{R}{r} \right),$$

donde U_0, R y λ son tres constantes positivas, y r es la distancia de la partícula al origen del sistema de coordenadas ($0 < r < \infty$).

a) Bosqueje cualitativamente la forma del potencial $U(r)$.

b) Encuentre la posición de equilibrio r_0 de la partícula en dicho potencial.

c) Escriba la energía potencial U como función de la separación x entre la particula y su posición de equilibrio (i.e. $r = r_0 + x$). Demuestre que para una distancia x pequeña, la energía potencial se puede escribir como:

$$U(x) = \text{constante} + \frac{1}{2} k x^2$$

d) Encuentre el período de las oscilaciones pequeñas alrededor de la posición de equlibrio en términos de las constantes del problema.

2.) Considere una máquina de Atwood (Fig. 1), donde dos masas m_1 y m_2 están conectadas por un cable inextensibe de longitud total L.

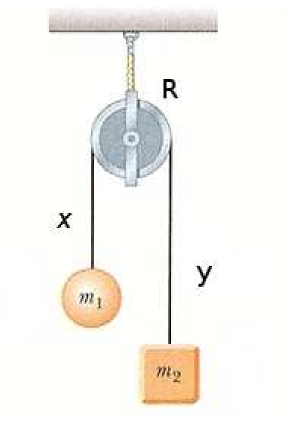


Figura 1: *Máquina de Atwood con polea de radio R. Se denota por x la distancia vertical entre m_1 y el centro de la rueda. Nótese que L es la suma de tres términos.*

a) Escriba el Lagragiano $\mathcal{L}$ del sistema como función de la coordenada generalizada x. Específique claramente su sistema de coordenadas.

b) Escriba y resuelva la ecuación de Lagrange corespondiente, y demuestre que la aceleración de la masa m_1 es:

$$\ddot{x} = \frac{m_1 - m_2}{m_1 + m_2} g$$

.

3.) Considere un planeta en órbita alrededor del Sol (Figura 2). Describimos la posición del planeta con sus coordenas polares (r, ϕ) en el plano de la órbita.

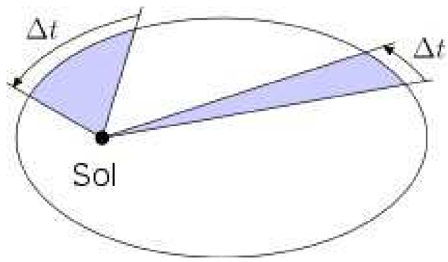


Figura 2: Esquema del movimiento de un planeta.

a) ¿Por qué es posible describir el movimiento del planeta en un plano y no en tres dimensiones?

b) Demuestre que la magnitud del momento angular orbital L del planeta es $L = mr^2\omega$, donde $\omega = \dot{\phi}$ es la velocidad angular del planeta.

c) Demuestre que el área barrida por el planeta durante un tiempo dt es $dA = \frac{1}{2}r^2\omega dt$.

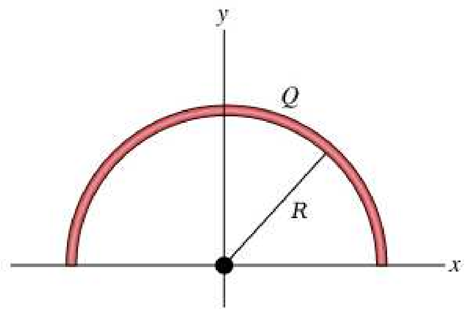
d) A partir del inciso (*c*), demuestre que la segunda ley de Kepler es una consecuencia directa de la conservación del momento angular L.

$$(a+b)^n = a^n + \frac{n}{1}a^{n-1}b + \frac{n(n-1)}{1 \cdot 2}a^{n-2}b^2 + \cdots$$

Electromagnetismo

1.) Considere los siguientes dos problemas de electrostática.

a) Un pedazo de plástico delgado es doblado en forma de semi-círculo de radio R y tiene una carga total Q distribuida uniformemente sobre su longitud (Fig. 3a). Encuentre el campo eléctrico en el centro del semi-círculo; tanto en magnitud como en dirección.



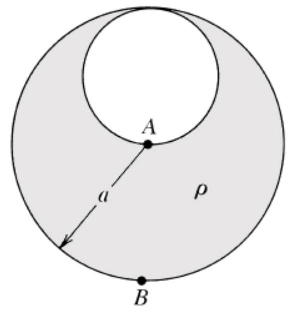


Figura 3: (a) Elemento de arco cargado eléctricamente. (b) Esfera cargada con hueco esférico.

b) Una esfera de radio a tiene una densidad de carga eléctrica positiva ρ, distribuida uniformemente. Posteriormente se le extrae una esfera más pequeña de radio $a/2$, como se muestra en la Fig. 3b, dejando tal espacio vacio. ¿Cuál es la dirección y magnitud del campo eléctrico en A y en B? *[Tome hacia "arriba" como la dirección $+y$]*

2.) Resuelva las siguientes cuestiones:

a) Escriba la ecuaciones de Maxwell en forma diferencial e integral, sea en el sistema CGS o en el MKS de unidades.

b) A partir de la ley de Faraday, demuestre que la fuerza electromotriz inducida $\mathcal{E}$ en un circuito por unidad de tiempo t está dada por:

$$\mathcal{E} = -k\frac{d\Phi}{dt}\,,$$

donde Φ es el flujo magnético y k una constante; en CGS $k = 1/c$ mientras que en SI $k = 1$, c es la velocidad de la luz.

c) Considere el sistema mostrado en la Figura 4. Calcule la $\mathcal{E}$ en el circuito en movimiento al instante mostrado. Suponga que la resistencia del circuito es suficientemente grande como para que su propia corriente inducida sea despreciable. Indique la dirección en que la corriente fluirá en el circuito. Recuerde que la magnitud del campo magnético inducido por una corriente I a una distancia r es, en CGS, $B = 2I/(cr)$; donde c es la velocidad de la luz.[1]

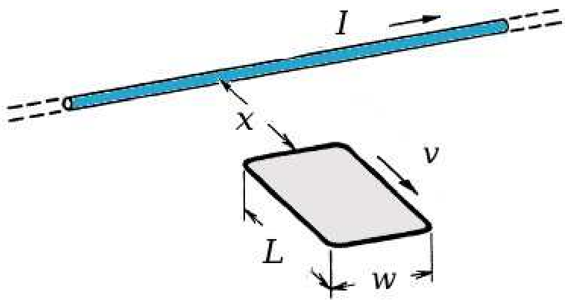


Figura 4: Aplicación de la ley de Faraday.

3.) Un ejemplo particular de ondas electromagnéticas (Fig. 5) en el vacio está dado por los campos eléctrico y magnético, respectivamente:

$$\mathbf{E}(\mathbf{x}, t) = [E_x, E_y, E_z] = [0, E_0 \sin(kx + \omega t), 0]\,,$$
$$\mathbf{B}(\mathbf{x}, t) = [B_x, B_y, B_z] = [0, 0, -E_0 \sin(kx + \omega t)]\,.$$

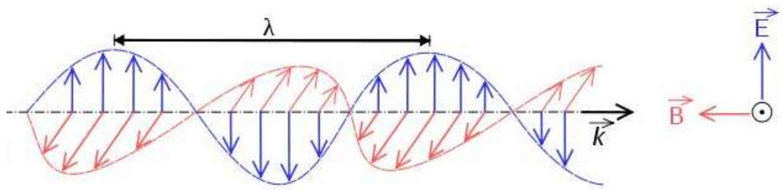


Figura 5: Esquema de onda electromagnética.

a) Muestre que estos campos satisfacen las ecuaciones de Maxwell si y solo sí ω y k están relacionados de una manera muy específica (relación de dispersión), e indique tal relación.

b) Suponga que $\omega = 10^{10}\,\mathrm{sec}^{-1}$ y que $E_0 = 0.05$ statvolt/cm en CGS; para unidades SI, tenemos que 1 statvolt/cm$=3 \times 10^4$ volt/m. ¿Cuál es la longitud de onda λ en cm?

c) Estime la densidad de energía del campo electromagnético asociada a la onda anterior (en CGS o en SI).

[1] En SI el campo es $B = \mu_0 I/(2\pi r)$

Parte II

Física Cuántica y Térmica

Física Cuántica

1.) Resuelva las siguientes cuestiones asociadas a fenómenos cuánticos.

a) Encuentre la longitud de onda λ y frecuencia ν de un fotón de energía $E = 1\,\mathrm{keV}$. Asimismo encuentre su momentum p.

b) El ancho natural de una línea espectral átomica de longitud de onda $\lambda = 4000\,A$ (A = un angstrom) se encuentra ser $\Delta\lambda = 10^{-4}\,A$. Utilizando el principio de incertidumbre de Heisenberg provea de una estimación para el tiempo τ en que el átomo permanece en tal estado de energía.

c) ¿Cuál es el valor de la energía de ionización del átomo de hidrogéno en su estado base? ¿A que longitud de onda λ corresponde y en qué parte del espectro electromagnéticos se encuentra? ¿Cómo es la dependencia de los niveles de energía con el número cuántico principal n?

2.) Un modelo sencillo para la emisión de radiación en la banda de microondas ($\lambda \approx 1 - 10\,\mathrm{cm}^{-1}$) de una molécula diátomica lo consitituye la rotación de un cuerpo rígido, de momento de inercia I_z y rotando libremente en el plano-xy alrededor del eje-z; véase la Figura 6.

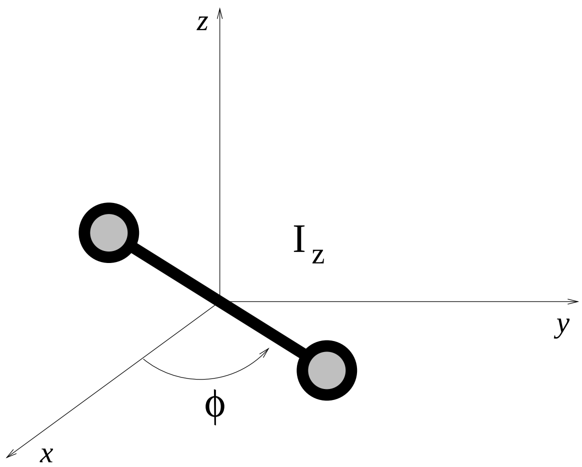


Figura 6: Rotor cuántico.

a) Establezca la ecuación de Schrödinger independiente del tiempo para la mólecula diátomica.

b) Encuentre los eigenvalores de energía y gráfique cualitativamente cómo van los níveles de energía con su número cúantico, que denotamos por m; con $m \in \mathcal{Z}$, los números enteros.

c) Encuentre las eigenfunciones correspondientes.

3.) Una partícula está confinada en un pozo de potencial infinito tri-dimensional. La "caja" correspondiente a tal potencial es un cuadrado de lado L.

a) Escriba la ecuación de Schrödinger pertinente para el sistema.

b) Encuentre las eigenfunciones normalizadas y eigenvalores de energía permitidos en tal sistema. Escriba la función de onda para el nivel energético más bajo permitido. Recuerde que la normalización de la función de onda ψ, en una dimensión, es de la forma

$$\langle\psi|\psi\rangle = \int \psi^* \psi \, \mathrm{d}x = 1 \, .$$

c) Si n_x, n_y y n_z son los 3 números cuánticos asociados a cada una de las dimensiones, en términos de los cuales se debió –por ejemplo– haber escrito la energía total de la partícula, éstos definen un espacio de puntos discretos; véase la Figura 7. Así, dada una energía E existe un número N de estados accesibles posibles al sistema. Determine una expresión para el número de estados N accesibles al sistema con una energía $\leq E$. Puede suponer que $N \gg 1$ para obtener dicha estimación; es decir, como si el espacio discreto de los n's fuera continuo.

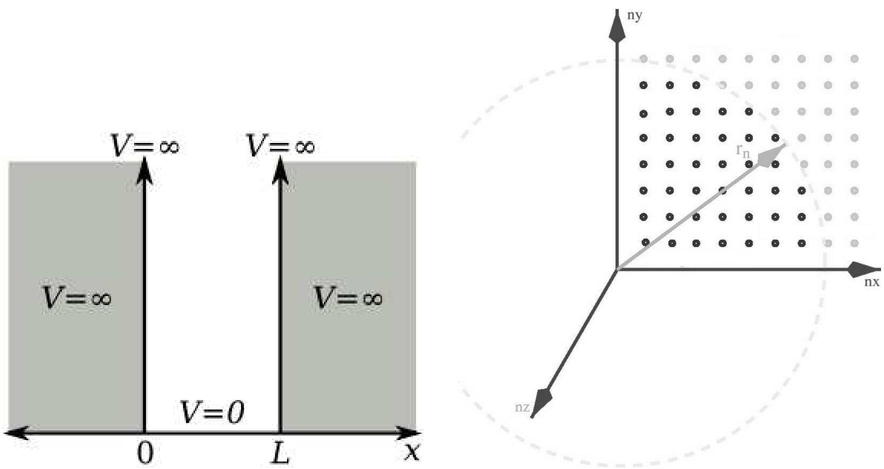


Figura 7: Pozo de potencial infinito en 1-dimensión, y un diagrama de estados cuánticos accesibles a un sistema en términos de los números cuánticos n_x, n_y y n_z.

Física Térmica

1.) Un gas ideal sigue el siguiente ciclo cerrado:

a) Expansión isobárica

b) Enfriamiento isocórico

c) Compresión isotérmica

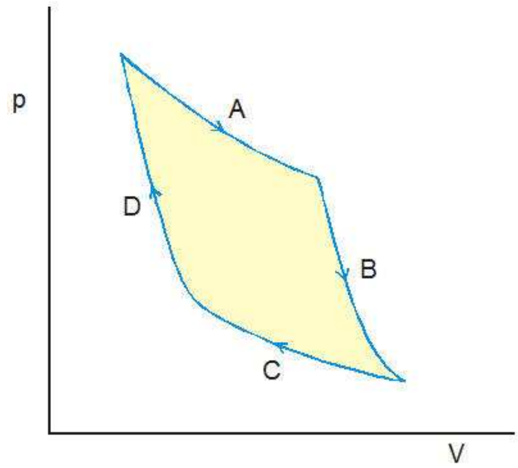


Figura 8: Ciclo termodinámico PV cerrado, no necesariamente el pertinente al del enunciado del Problema 1.

Sean P_i, V_i y T_i la presión, volumen y temperatura, respectivamente, del gas al principio de cada elemento del ciclo arriba mencionado (con $i = 1, 2, 3$).

i) Dibuje un esquema del ciclo en el diagrama PV (e.g. Fig. 8).

ii) Calcule el trabajo obtenido en el ciclo.

2.) Un gas ideal está descrito por una ecuación de estado $pV = NkT$; donde p es la presión, V el volumen, T la temperatura, k la constante de Boltzmann de los gases, y N el número de partículas. Para el gas ideal, la energía interna U es solo función de la temperatura. Demuestre para este tipo de gas:

a) Que $c_p = c_v + k$, donde c_p y c_v son las capacidades caloríficas (por partícula) a presión y volumen constante, respectivamente.

b) Que la cantidad pV^γ es una constante durante una expansión adiabática; puede suponer que $c_p/c_v = \gamma$ es una constante.

3.) Resuelva las siguientes cuestiones asociadas a transiciones de fase, fenómenos físicos que juegan un papel importante –por ejemplo– en el universo temprano.

a) ¿Qué es una transición de fase en general? Provea ejemplos de las mismas.

b) ¿Qué es el calor latente L?

c) Una manera de caracterizar una transición de fase, en un diagrama $P-T$, es a través de la ecuación de Clausius-Clapeyron; que matemáticamente da la pendiente de la curva que separa dos fases en tal diagrama. Escriba esta ecuación e indique el significado físico de cada término que aparece en la ecuación de Clausius-Clapeyron.

d) El Helio-4 líquido tiene un punto de ebullición de $T = 4.2\,^{\circ}\mathrm{K}$, en condiciones termodinámicas normales (e.g. $p = 760\,\mathrm{mmHg}$). Sin embargo a una presión de $p = 1\,\mathrm{mmHg}$ el He4 ebulle a $T = 1.2\,^{\circ}\mathrm{K}$ (Fig. 9). Estime un valor para el calor latente L de vaporización del helio en este rango de temperaturas.

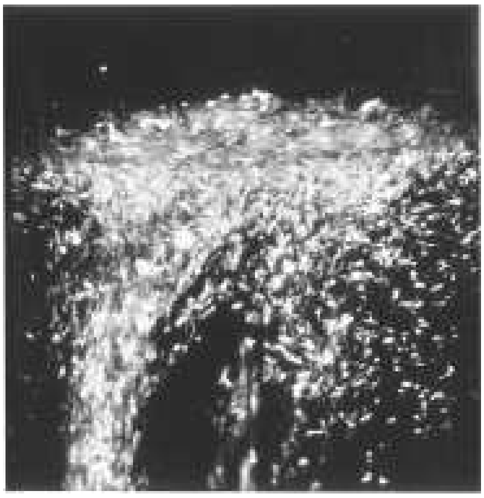


Figura 9: Transición de fase del Helio-4, de Helio-I a Helio-II; fenómeno de superfluidez.

Constantes Físicas y Factores de Conversión

Velocidad de la luz	c	3.00×10^{8} m s^{-1}
Carga del electrón	e	1.60×10^{-19} C
Masa del electrón	m_e	9.11×10^{-31} kg
Constante de Planck	h	6.63×10^{-34} J s^{-1}
	$\hbar$	1.054×10^{-34} J s^{-1}
	h	4.14×10^{-15} eV s
	hc	12.4 keV Å
Constante de gravedad	G	6.67×10^{-11} N m^{2} kg^{-2}
Permitividad del vacío	ϵ_0	8.85 10^{-12} N^{-1} m^{-2} C^{2}
Permeabilidad magnética del vacío	μ_0	1.26×10^{-6} m kg C^{-2}
Número de Avogadro	N_A	6.02×10^{23} mol^{-1}
Constante de Boltzmann	k	1.38×10^{-23} J K^{-1}
Constante de los gases	R	8.31 J K^{-1} mol^{-1}
Magnetón de Bohr	$\mu_B = \frac{e\hbar}{2m_e c}$	5.788×10^{-9} eV G^{-1}.
Electrón volt	1 eV	1.602×10^{-19} J
Joule	J	10^{7} erg
Angstrom	A	10^{-10} m = 0.1 nm
statvolt/cm (campo eléctrico)	statv/cm	3×10^{4} volt/m (1 volt/m = 1 N/C)