MAESTRÍA EN CIENCIAS (ASTRONOMÍA) — TERMODINÁMICA

EXAMEN DE ADMISIÓN 2011-I — 10 JUNIO 2010

*Instructivo:*

- *Contestar 2 de los 3 problemas*
- *Tiempo disponible una hora*
- *Empezar cada problema en una hoja nueva*
- *Sólo escribir sobre un lado de la hoja*
- *Escribir su nombre completo en cada hoja*

1. (a) Enuncie las leyes cero, primera y segunda de la termodinámica.

   (b) Una máquina térmica ideal que funciona según el ciclo de Carnot realiza un trabajo igual a 75,000 julios. La temperatura de la fuente caliente es de 100 °C y de la fuente fría de 0 °C. Determine:

      I. La eficiencia de la máquina
      II. La cantidad de calor que la máquina recibe de la fuente caliente
      III. La cantidad de calor que cede a la fuente fría.

2. Dos muestras iguales de gas ideal inicialmente a la misma temperatura $T$ y presión $p$ se comprimen hasta que su volumen se reduce a la mitad, en un caso isotérmicamente y en el otro adiabáticamente.

   (a) ¿En cuál muestra la presión final es mayor?

   (b) Suponiendo que los procesos son reversibles, calcular el cambio de entropía del gas y de los alrededores. ¿Se satisface $\Delta s \geq 0$?

   Calcúlense estos cambios para un mol de gas.

3. Un gas tiene las siguientes ecuaciones de estado

$$P = \frac{U}{V}, \qquad T = 3B\left(\frac{U^2}{NV}\right)^{1/3}$$

   donde $B$ es constante. Si se hace pasar el gas por un experimento de Joule-Thompson (expansión a entalpía constante a través de una válvula termicamente aislada), encuentre la temperatura final en función de la temperatura inicial y de las presiones inicial y final.

   AYUDA: Recuerda que para entalpía constante se tiene:

$$\left(\frac{\delta T}{\delta P}\right)_H = \frac{V}{C_p}\big(T\alpha - 1\big), \qquad \alpha = -\frac{1}{v}\left(\frac{\delta v}{\delta T}\right)_p, \qquad C_p = \left(\frac{\delta U}{\delta T}\right)_p, \qquad v = \frac{V}{N}.$$

MAESTRÍA EN CIENCIAS (ASTRONOMÍA) — ELECTROMAGNETISMO

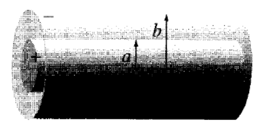
EXAMEN DE ADMISIÓN 2011-I — 10 JUNIO 2010

*Instructivo:*

- *Contestar 2 de los 3 problemas*
- *Tiempo disponible una hora*
- *Empezar cada problema en una hoja nueva*
- *Sólo escribir sobre un lado de la hoja*
- *Escribir su nombre completo en cada hoja*

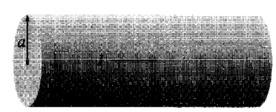
1. (a) ¿Cúal de los siguientes no es un campo eléctrostático válido? (justifique su respuesta)
   - I. $E = xy\hat{\mathbf{x}} + 2yz\hat{\mathbf{y}} + 3xz\hat{\mathbf{z}}$
   - II. $E = y^2\hat{\mathbf{x}} + (2xy + z^2)\hat{\mathbf{y}} + 2yz\hat{\mathbf{z}}$

   (b) Un cable coaxial largo tiene una densidad de carga volumetrica uniforme $\rho$ en el cilindro interior (de radio $a$, y una densidad superficial de carga $\sigma$ en el cascarón de radio $b$ (ver fig). La carga del cascarón exterior es negativa y de magnitud tal que el cilindro completo es neutro.

   Encuentre el campo eléctrico, como función de la distancia al centro del cilindro ($s$):
   - I. dentro del cilindro interno ($s < a$),
   - II. entre los 2 cilindros ($a < s < b$),
   - III. fuera del cable ($s > b$).
   - IV. Para cada caso, grafique la magnitud del campo como función de $s$ (indique valores en los ejes de la gráfica.)

2. Encontrar el campo magnético (magnitud y dirección) dentro y fuera de un cable conductor (cilindro largo con radio $a$) que transporta una corriente constante $I$ en su superficie.

3. Dos ondas planas electromagnéticas con polarización circular opuesta y con la misma $\omega$, $k$, y amplitud, $E$, están sobrepuestas.

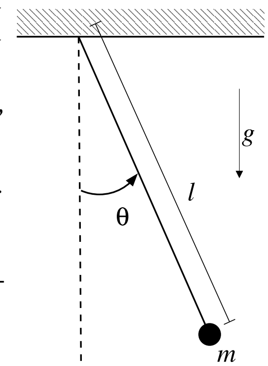
   (a) Mostrar que la onda resultante tiene polarización lineal y que su amplitud es $2E$.

   (b) Repetir el ejercicio para la superposición de dos ondas con polarización líneal en la dirección $\hat{\mathbf{x}}$, y en donde la diferencia de fase entre las dos ondas es $\pi$. Las dos ondas tienen la misma $\omega$, $k$, y amplitud, $E$. ¿Cuál es la amplitud de la onda resultante en este caso?

*Instructivo:*

- *Contestar 2 de los 3 problemas*
- *Tiempo disponible una hora*
- *Empezar cada problema en una hoja nueva*
- *Sólo escribir sobre un lado de la hoja*
- *Escribir su nombre completo en cada hoja*

1. Considera un péndulo simple formado por una pesa de masa $m$, atada a un cable de masa despreciable, de longitud $\ell$. como se muestra en la figura.

   El péndulo se encuentra en un campo gravitacional constante ($\mathbf{F} = -mg\hat{\mathbf{y}}$), y se mueve en un plano. Despreciando los efectos del aire:

   (a) ¿Cuántas coordenadas generalizadas son necesarias para describir el sistema?

   (b) Encuentre el Lagrangiano del sistema en términos de dichas coordenadas generalizadas.

   (c) Mediante las ecuaciones de Euler-Lagrange, encuentre las ecuaciones de movimiento (para las coordenadas generalizadas).

   (d) Escriba la solución general para el caso de oscilaciones pequeñas.

2. Dos masas aisladas $m_1$ y $m_2$ tales que $M = m_1 + m_2$ interactúan gravitacionalmente, se encuentran separadas una distancia $r_0$ y son soltadas del reposo. Muestra que cuando la separación es $r$ (con $r < r_0$) las velocidades están dadas por:

$$v_1 = m_2\sqrt{\frac{2G}{M}\left(\frac{1}{r} - \frac{1}{r_0}\right)} \qquad \text{y} \qquad v_2 = -m_1\sqrt{\frac{2G}{M}\left(\frac{1}{r} - \frac{1}{r_0}\right)}$$

3. Considere una partícula de masa $m$ que se mueve en un plano, sujeta a una fuerza $\mathbf{F} = -k\,r\,\hat{\mathbf{r}}$, donde $k$ es una constante real positiva.

   (a) Escriba el Lagrangiano del sistema en coordenadas polares.

   (b) ¿Qué cantidades de movimiento se conservan y porqué?

   (c) Esboce el potencial efectivo y diga cómo son las órbitas posibles.

*Instructivo:*

- *Contestar 2 de los 3 problemas*
- *Tiempo disponible una hora*
- *Empezar cada problema en una hoja nueva*
- *Sólo escribir sobre un lado de la hoja*
- *Escribir su nombre completo en cada hoja*

1. Empleando los operadores de ascenso y descenso

$$a^\dagger = \sqrt{\frac{m\omega}{2\hbar}}\,\hat{x} - \frac{i}{\sqrt{2m\hbar\omega}}\,\hat{p}$$

$$a = \sqrt{\frac{m\omega}{2\hbar}}\,\hat{x} + \frac{i}{\sqrt{2m\hbar\omega}}\,\hat{p}$$

y la relación de conmutación entre los operadores de posición y momento $[\hat{x}, \hat{p}] = i\hbar$, muestra que el conmutador de los operadores de ascenso y descenso satisface $[a, a^\dagger] = 1$.

2. ¿Cuáles son las energías y eigenfunciones del potencial

$$V(x) = \begin{cases} \frac{1}{2} m\omega^2 x^2 & \text{si } x > 0 \\ \infty & \text{si } x < 0 \end{cases} \quad ?$$

3. Como una medida de qué tan rápido está cambiando un sistema, calcula la derivada temporal del valor esperado de la observable, $A(x, p, t)$, y demuestra que

$$\frac{d}{dt}\langle A\rangle = \frac{i}{\hbar}\left\langle[\hat{H}, \hat{A}]\right\rangle + \left\langle\frac{\partial \hat{A}}{\partial t}\right\rangle$$