Instituto de Astronomía

y

Centro de Radioastronomía y Astrofísica

EXAMEN DE ADMISIÓN

Semestre 2012-I

(Otoño del 2011)

a 7 de Junio de 2011

———————————————-

La duración del examen es de 6 horas en total, de 2 sesiones de 3 horas; a razón de 1-1/2 hora por área de conocimiento. Habrá una sesión matutina y otra vespertina.

La 1ra. sesión incluye los temas de Mecánica Clásica y Electromagnétismo, y la 2da. de Física Cuántica y Térmica.

Seleccione 2 problemas por área.

Responda las preguntas en hojas separadas (por una sola cara).

No olvide escribir su clave asignada en cada una de las hojas.

Parte I

Mecánica Clásica y Electromagnétismo

Mecánica Clásica

1.) Un bloque de masa m se desliza sin fricción sobre la superficie interna de un semicilíndro fijo de radio constante R. El sistema está completamente determinado por la coordenada θ; ver el diagrama en la Fig. 1.

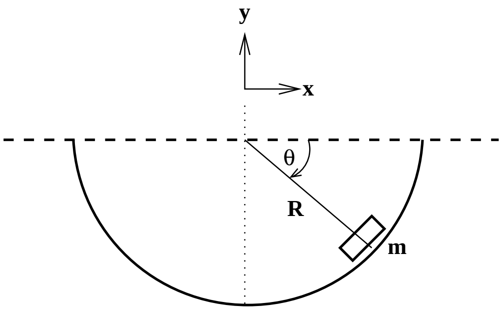

Figura 1

a) Escriba la energía cinética T del sistema.

b) Escriba la energía potencial U y grafíquela para $0 < \theta < \pi$. ¿Existe un equilibrio estable?

c) Construya la Lagrangiana y escriba las ecuaciones de Lagrange para así encontrar la ecuación de movimiento en términos de la coordenada generalizada θ.

d) Para valores pequeños del ángulo complementario $90° - \theta$, la ecuación se puede aproximar por la ecuación de movimiento armónico. ¿Cuál es la frecuencia de las oscilaciones pequeñas de este oscilador?

2.) Una solución propuesta para aliviar el problema de la ingravidez en el espacio es utilizar una estación espacial que gire. Considere una estación espacial de forma de anillo con radio R que gira con velocidad angular constante Ω; ver Figura 2.

a) ¿Cuál es la magnitud y dirección de la fuerza centrífuga sobre una persona de masa m ubicada en el anillo exterior de la estación?

b) ¿Qué tan rápido tiene que girar la estación para que la persona sienta el mismo peso que tiene en la Tierra si el radio del anillo exterior es $R = 100$ m y se puede tomar $g = 10\ \mathrm{m\,s^{-2}}$?

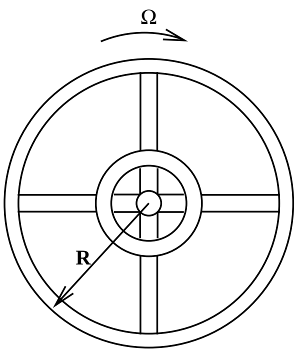

Figura 2

c) ¿Qué efectos experimenta una persona que está corriendo con una velocidad $v=3$ m s^{-1} por el pasillo en el anillo exterior (a) en la misma dirección que la rotación, (b) en la dirección opuesta de la rotación?

Ayuda: recuerde que en un sistema no-inercial, que rota con una velocidad angular $\mathbf{\Omega}$, la ecuación de movimiento adquiere una forma del tipo:

$$m\frac{d\mathbf{v}}{dt} = -\frac{\partial U}{\partial \mathbf{r}} + m\mathbf{r} \times \frac{d\mathbf{\Omega}}{dt} + 2m\mathbf{v} \times \mathbf{\Omega} + m\mathbf{\Omega} \times (\mathbf{r} \times \mathbf{\Omega})$$

3.) Resuelva los siguientes apartados sobre el movimiento orbital de un objeto.

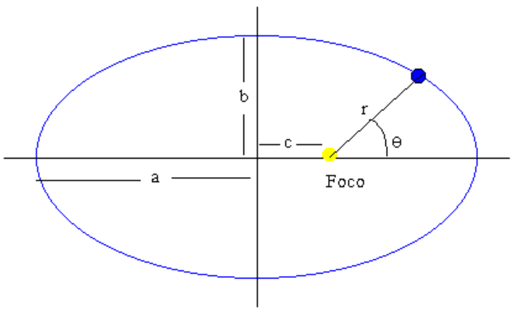

Figura 3

a) Un cuerpo de masa m está en una órbita circular de radio R_0 alrededor de otro cuerpo de masa M, con $M \gg m$. Escriba las expresiones para la energía total, E_0, el momento angular L_0, y el período orbital, P_0, del cuerpo m en términos de M, R_0 y su propia masa.

b) Ahora considere el caso en que m se encuentra en una órbita éliptica, con semi-eje mayor $a = 2R_0$ y una excentricidad $e = 1/2$. Escriba la energía, E, momento angular L y período P bajo esta nueva condición. Obtenga los cocientes E/E_0, L/L_0 y P/P_0. Comente sobre sus resultados.

Electromagnetismo

(Utilice el sistema de unidades que desee)

1.) Una esfera de radio a, sólida y de material conductor, lleva una carga eléctrica Q; véase Figura 4. Está rodeada por una cáscara de radio externo b, y de material dieléctrico con permitividad ϵ. Halle el potencial eléctrico en el centro de la esfera con respecto a un punto muy lejano.

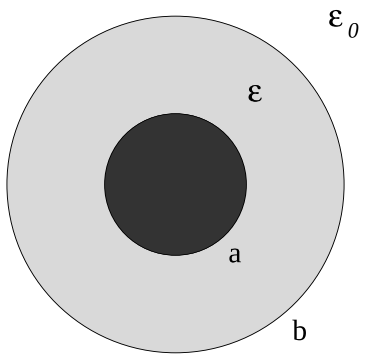

Figura 4

2.) Utilice la Ley de Biot-Savart para calcular la magnitud y dirección del campo magnético en un punto P localizado como se muestra en la Figura 5, cuando una corriente estacionaria I se mantiene en el circuito y fluyendo en la dirección indicada.

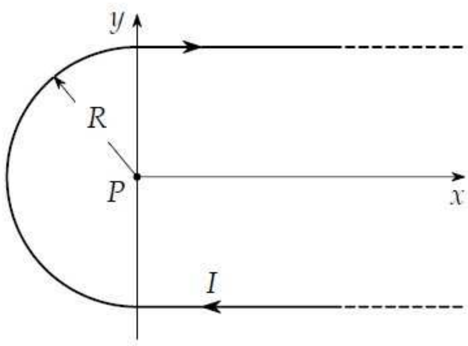

Figura 5

3.) El campo eléctrico de una onda plana en espacio vacío (Fig. 6) está dado (en el sistema de unidades MKS) por

$$\mathbf{E} = 1000\,\hat{\mathbf{x}}\ \exp\left\{ i \left[\frac{(2\hat{\mathbf{y}} - \hat{\mathbf{z}}) \cdot \mathbf{r}}{100} - \omega t \right] \right\}$$

donde $\hat{\mathbf{x}}$, $\hat{\mathbf{y}}$ y $\hat{\mathbf{z}}$ son vectores unitarios a lo largo de las direcciones x, y y z, respectivamente.

a) Calcule la longitud de onda (λ) y la frecuencia (ν) de la onda.

b) Encuentre el campo magnético $\mathbf{B}$ correspondiente para esta onda plana.

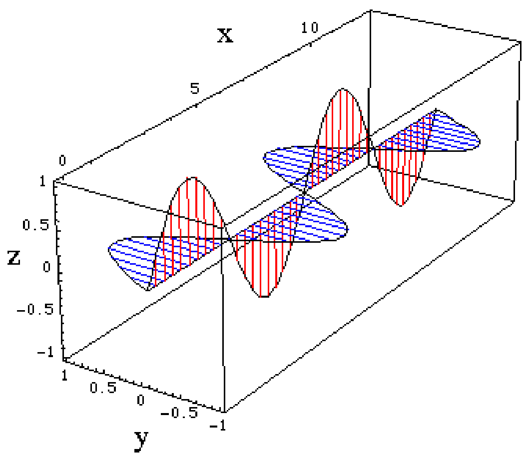

Figura 6

Parte II

Física Cuántica y Térmica

Física Cuántica

1.) Considere el potencial-escalón (Fig. 7) en una dimensión:

$$V(x) = \begin{cases} 0 & \text{si} \quad x < 0 \\ V_0 > 0 & \quad\quad x > 0 \end{cases}$$

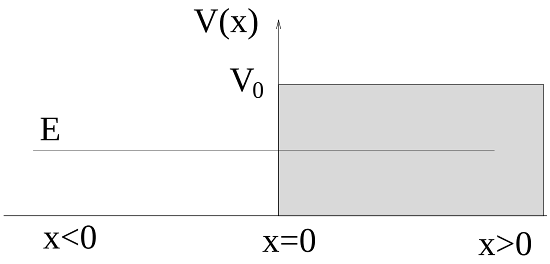

Figura 7

a) Dibuje cualitativamente las funciones de onda $\psi(x)$ de una partícula para los casos en que su energía E es: $0 < E < V_0$ y $E > V_0$. ¿Por qué no hay función de onda para el caso $E < 0$?

b) Encuentre la función de onda $\psi(x)$ para toda x, cuando la energía de la partícula es $0 < E < V_0$.
Considere la función de onda para la región $x < 0$, ψ_I, y para la región $x > 0$, ψ_{II}. Resuelva para cada caso y acople las soluciones en $x = 0$.
Demuestre que la solución puede ser expresada como:

$$\psi_I(x) = A\left(\mathrm{e}^{ikx} + \frac{ik+\alpha}{ik-\alpha}\mathrm{e}^{-ikx}\right), \qquad \psi_{II}(x) = \frac{2ik}{ik-\alpha}A\,\mathrm{e}^{-\alpha x}$$

con

$$k^2 = \frac{2mE}{\hbar^2}, \qquad \alpha^2 = \frac{2m(V_0 - E)}{\hbar^2}.$$

La constante A puede ser determinada de la condición de normalización de la función de onda total ψ, pero no se requiere encontrarla aquí.

2.) El positrón es una partícula con igual masa que el electrón pero con carga positiva. Cuando un electrón y un positrón se encuentran, antes de aniquilarse pueden formar brevemente un *positronio*, que es un átomo en que ambos giran uno alrededor del otro (Figura 8).

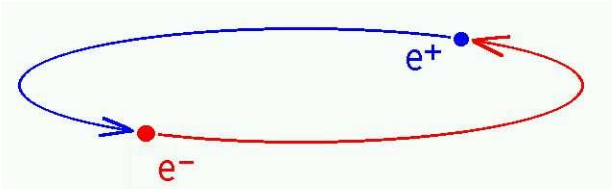

Figura 8

a) ¿Cuáles son las energías del positronio, en términos del número cuántico principal n?

b) ¿Cuál es la longitud de onda de la transición del estado $2s$ al estado $1s$ en el positronio?

c) Cuando el electrón y el positrón se aniquilan producen dos o tres rayos gama. ¿Cuanto vale la suma de las energías de los rayos gama así producidos?

3.) Considere un sistema cuántico cuyo estado inicial, $|\psi(0)\rangle$, y hamiltoneano, H están dados, respectivamente, por

$$|\psi(0)\rangle = \frac{1}{5}\begin{bmatrix} 3 \\ 0 \\ 4 \end{bmatrix} \qquad \text{y} \qquad H = \begin{bmatrix} 5 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 2 & 1 \end{bmatrix}$$

a) Si medimos la energía del sistema ¿cuáles valores encontramos? ¿con qué probabilidades encontramos tales energías?

b) Si se encuentra un valor de 3 para la energía, ¿cuál es el estado del sistema inmediatamente después de la medición?

c) ¿Cuál será el estado del sistema, $|\psi(t)\rangle$, un tiempo después de la medición hecha en el inciso anterior?

d) ¿Es el operador A una constante de movimiento? siendo

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 5 \\ 0 & 5 & 0 \end{bmatrix}$$

e) Constituye el hamiltoneano anterior un conjunto completo de observables conmutantes?

Física Térmica

1.) Dos tanques (del mismo volumen) se conectan por un tubo de manera que sus contenidos se mezclan y eventualmente llegan a un equilibrio.

Inicialmente, el gas en el tanque 1 está a una temperatura $T_1 = 150\,°\mathrm{C}$ y presión $p_1 = 150\,\mathrm{kPa}$, mientras que el tanque 2 se encuentra a una temperatura $T_2 = 100\,°\mathrm{C}$ y presión $p_2 = 75\,\mathrm{kPa}$.

Calcule la presión de la mezcla cuando llega a equilibrio a temperatura ambiente $T_a = 20\,°\mathrm{C}$, suponiendo que ambos tanques contienen el mismo gas ideal.

2.) Comprimimos de manera isotérmica, hasta una presión de 20 bars, un metro cúbico de aire que está inicialmente en condiciones normales ($T_0 = 273\,\mathrm{K}$, y $P_0 = 101325\,\mathrm{Pa}$). Consideramos que el aire se comporta como un gas ideal.

a) Calcule el volumen final del aire.

b) Calcule el trabajo de compresión y la cantidad de calor concedido por el gas al medio ambiente.

c) La masa de aire vuelve a la presión $P_2 = 1$ bar por medio de una expansión adiabática con índice $\gamma = 1.42$. Determine el volumen V_2 y la temperatura T_2 del gas después de la expansión.

Calcule el trabajo concedido al medio exterior y compárelo con el trabajo proporcionado al gas durante la compresión isotérmica. Interprete sus resultados.

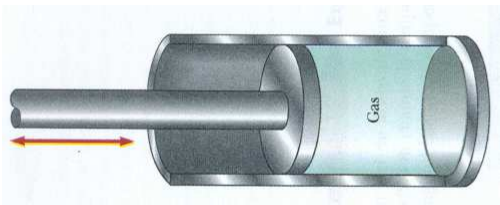

Figura 9

3.) A presión atmosférica de 1 atm el agua hierve a 373 K. ¿Qué presión se debe aplicar si queremos aumentar esta temperatura a 400 y a 500 K? El calor latente de vaporización es de $4.07 \times 10^7\,\mathrm{J/kmol}$ y la constante $R = 8314.4\,\mathrm{J/(K\,kmol)}$.

¿Qué se puede decir de la evolución de la presión con respecto a la temperatura?

Constantes Físicas y Factores de Conversión

Velocidad de la luz	c	3.00×10^{8} m s^{-1}
Carga del electrón	e	1.60×10^{-19} C
Masa del electrón	m_e	9.11×10^{-31} kg
Constante de Planck	h	6.63×10^{-34} J s^{-1}
	$\hbar$	1.054×10^{-34} J s^{-1}
	h	4.14×10^{-15} eV s
	hc	12.4 keV Å
Constante de gravedad	G	6.67×10^{-11} N m^{2} kg^{-2}
Permitividad del vacío	ϵ_0	8.85 10^{-12} N^{-1} m^{-2} C^{2}
Permeabilidad magnética del vacío	μ_0	1.26×10^{-6} m kg C^{-2}
Número de Avogadro	N_A	6.02×10^{23} mol^{-1}
Constante de Boltzmann	k	1.38×10^{-23} J K^{-1}
Constante de los gases	R	8.31 J K^{-1} mol^{-1} 1 kmol= 10^{3}mol
Magnetón de Bohr	$\mu_B = \frac{e\hbar}{2m_e c}$	5.788×10^{-9} eV G^{-1}.
Electrón volt	1 eV	1.602×10^{-19} J
Joule	J	10^{7} erg
Angstrom	A	10^{-10} m = 0.1 nm
statvolt/cm (campo eléctrico)	statv/cm	3×10^{4} volt/m (1 volt/m = 1 N/C)
Atmósfera	atm	1.013 bar = 10^{5} Pa