



FACULTAD DE CIENCIAS
INSTITUTO DE ASTRONOMÍA
CENTRO DE RADIOASTRONOMÍA Y ASTROFÍSICA
INSTITUTO DE CIENCIAS NUCLEARES

EXAMEN DE ADMISIÓN

Otoño de 2013

10 Y 11 DE JUNIO DE 2013



INSTRUCCIONES GENERALES

- La duración del examen es de **1.5 horas por área** de conocimiento.
- Son 5 áreas de conocimiento: Mecánica Clásica, Electromagnetismo, Física Cuántica, Física Térmica, y Astronomía General
- Realice las áreas pertinentes según fue informado por el *Posgrado en Astrofísica*.
- Seleccione 2 problemas por área salvo para la de Astronomía, en la cual hay que considerar todas las preguntas; que son de opción múltiple en sus respuestas.
- Responda las preguntas en **hojas separadas** (por una sola cara). Las respuestas del área de Astronomía indíquelas en 1 sola página.
- **Escriba su clave asignada para este examen, y el problema, en cada una de las hojas utilizadas.**
- No escriba información demasiado cerca de los bordes de las hojas de respuesta; deje al menos un par de centímetros de los bordes.
- Solo está permitido utilizar lápiz (o bolígrafo) y una calculadora científica sencilla para realizar el examen. No está permitido utilizar computadoras portátiles o cuaderno de notas.
- Dado que las hojas del examen serán digitalizadas y enviadas vía electrónica a profesores para su evaluación, asegúrese de no escribir demasiado tenue; por ejemplo, no utilizar un lápiz “duro” sino uno normal o suave. Tampoco utilice tinta roja en caso de escribir con bolígrafo.

CONSTANTES & NÚMEROS ÚTILES

Velocidad de la luz	c	$3.00 \times 10^8 \text{ m s}^{-1}$
Carga del electrón	e	$1.60 \times 10^{-19} \text{ C}$
Masa del electrón	m_e	$9.11 \times 10^{-31} \text{ kg}$; 0.511 MeV
Masa del protón	m_p	$1.67 \times 10^{-27} \text{ kg}$; 940 MeV
Constante de Planck	h	$6.63 \times 10^{-34} \text{ J}\cdot\text{s} = 4.14 \times 10^{-15} \text{ eV s}$
	hc	12.4 keV Å
Constante de Stefan-Boltzmann	σ	$5.67 \times 10^{-5} \text{ erg cm}^{-2} \text{ K}^{-4} \text{ s}^{-1}$
Constante de radiación	$a = 4\sigma/c$	$7.566 \times 10^{-15} \text{ erg cm}^{-3} \text{ K}^{-4}$
Sección recta de Thomson	σ_T	$6.65 \times 10^{-29} \text{ m}^2$
Constante de gravedad	G	$6.67 \times 10^{-11} \text{ m}^3 \text{ kg}^{-1} \text{ s}^{-2}$ $6.67 \times 10^{-8} \text{ cm}^3 \text{ g}^{-1} \text{ s}^{-2}$
Permitividad del vacío	ϵ_0	$8.85 \times 10^{-12} \text{ N}^{-1} \text{ m}^{-2} \text{ C}^2$
Permeabilidad magnética del vacío	μ_0	$1.26 \times 10^{-6} \text{ m kg C}^{-2}$
Número de Avogadro	N_A	$6.02 \times 10^{23} \text{ mol}^{-1}$
Constante de Boltzmann	k	$1.38 \times 10^{-23} \text{ J K}^{-1}$ $1.38 \times 10^{-16} \text{ erg K}^{-1}$
Constante de los gases	R	$8.314 \text{ J K}^{-1} \text{ mol}^{-1}$ $0.08205 \text{ L atm K}^{-1} \text{ mol}^{-1}$
Magnetón de Bohr	$\mu_B = \frac{e\hbar}{2m_e c}$	$5.788 \times 10^{-9} \text{ eV G}^{-1}$.
Electrón volt	eV	$1.602 \times 10^{-19} \text{ J}$, 12,000 K
Joule	J	10^7 erg
Angstrom	Å	$10^{-10} \text{ m} = 0.1 \text{ nm}$
statvolt/cm (campo eléctrico)	statv/cm	$3 \times 10^4 \text{ volt/m}$ (volt/m = N/C)
Atmósfera	atm	$1.01325 \text{ bar} = 101,325 \text{ Pa}$
Constante gravitacional	G	$4.3007 \times 10^{-9} \text{ Mpc M}_\odot^{-1} (\text{km/s})^2$ $4.4984 \times 10^{-3} \text{ pc}^3 \text{ M}_\odot^{-1} \text{ Myr}^{-2}$
Masa solar	M_\odot	$1.99 \times 10^{33} \text{ g}$
Radio solar	R_\odot	$6.96 \times 10^{10} \text{ cm}$
Luminosidad solar	L_\odot	$3.827 \times 10^{33} \text{ erg s}^{-1}$
Unidad Astronómica	AU	$1.496 \times 10^{13} \text{ cm}$
Parsec	pc	$3.086 \times 10^{18} \text{ cm} = 206,264.806 \text{ AU}$
Constante de Hubble	H_0	$70 h_7 \text{ km s}^{-1} \text{ Mpc}^{-1}$, $h_7 = 1.0$
Tiempo de Hubble	$t_H = 1/H_0$	$13.97 h_7^{-1} \text{ Gyr}$
Densidad crítica	$\rho_{c0} = 3H_0^2/8\pi G$	$9.204 \times 10^{-27} h_7^2 \text{ kg m}^{-3}$ $1.352 \times 10^{11} h_7^2 \text{ M}_\odot \text{ Mpc}^{-3}$

Parte I
Mecánica Clásica

[1] Considere un cilindro de radio R cuyo centro de masa está desplazado una distancia h de su centro geométrico. Además, uno de sus ejes principales es paralelo al eje del cilindro. El momento de inercia con respecto a este eje principal es I .

- a) Hállese la energía cinética del cilindro cuando este está rodando sobre un plano horizontal. Exprésela en función del momento de inercia principal, I .
- b) Hállense las ecuaciones de movimiento del cilindro y el periodo de las pequeñas oscilaciones del mismo a uno y otro lado de su posición de equilibrio.

[2] Consideremos un oscilador armónico de frecuencia angular natural ω_0 .

- a) Usando la posición x y la velocidad \dot{x} como coordenadas generalizadas, escriba la energía cinética T , la energía potencial V , y el Lagrangiano \mathcal{L} del sistema.
- b) Escriba las ecuaciones de Lagrange del sistema y resuélvalas, tomando como condiciones iniciales $x = x_0$ y $\dot{x} = 0$ a $t = 0$.
- c) ¿Cuál es la definición general del Hamiltoniano de un sistema? En la formulación Lagrangiana de la mecánica clásica, las variables que utilizamos para describir el sistema son las coordenadas generalizadas. ¿Cuáles son las variables fundamentales en la formulación Hamiltoniana?
- d) Escriba el Hamiltoniano \mathcal{H} del oscilador armónico, y las ecuaciones de Hamilton asociadas. Demuestre que su resultado es equivalente a la ecuación de movimiento que se obtuvo en el inciso (b).
- e) ¿Cuál es la trayectoria que describe el oscilador armónico en el espacio fase?

[3] ¿Cuáles de las siguientes fuerzas son conservativas?

- a) $\mathbf{F} = k(x, 2y, 3z)$
- b) $\mathbf{F} = k(y, x, 0)$
- c) $\mathbf{F} = k(-y, x, 0)$

En todos los casos, k es una constante real. En los casos donde la fuerza es conservativa, encuentre la energía potencial asociada.

Parte II
Electromagnetismo

[1] Considere un cable conductor largo de radio a y una carga total densidad de carga lineal σ .

- a) Encuentre el potencial electrostático como función de la distancia al cable, r , suponiendo que éste se anula a una distancia R ; es decir, $V(R) = 0$, con $R > a$.
- b) Grafique el potencial, indicando valores en los ejes de las gráficas.

[2] Sea el siguiente campo eléctrico, en coordenadas cilíndricas (ρ, ϕ, z) :

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}) = \frac{V}{\ln(a/b)} \frac{\text{sen}(\pi z/l)}{\rho} \cos(\omega t) \hat{\rho}, \quad (1)$$

donde V , a , b y l son ciertas constantes.

- a) Encontrar el campo magnético asociado.
- b) ¿Para qué valor de ω las expresiones del campo eléctrico y del campo magnético cumplen las ecuaciones de Maxwell en una zona sin corrientes ni cargas eléctricas?

Recuerde que el rotacional de un campo vectorial \mathbf{F} en coordenadas cilíndricas (ρ, ϕ, z) esta dado por

$$\nabla \times \mathbf{F} = \frac{1}{\rho} \begin{vmatrix} \hat{\rho} & \rho \hat{\phi} & \hat{z} \\ \frac{\partial}{\partial \rho} & \frac{\partial}{\partial \phi} & \frac{\partial}{\partial z} \\ F_\rho & F_\phi & F_z \end{vmatrix}$$

[3] Un alambre metálico está doblado en forma circular de radio 20 cm. El alambre presenta una resistencia a la corriente de 10Ω , y está puesto dentro de un campo magnético uniforme y constante de 2 Tesla, que es perpendicular al plano del anillo. De repente, el anillo empieza a contraerse, disminuyendo su radio a la tasa de 1 cm por segundo. Dos segundos después, ¿cuál será la corriente que fluirá por el anillo?

Parte III
Astronomía General

- [1] ¿Qué distancia se utiliza como línea de base para realizar medidas de la paralaje de estrellas cercanas?
- a) 2 km
 - b) 2 unidades astronómicas
 - c) 2 años luz
 - d) 2 parsecs
- [2] ¿Cuál es la magnitud de un sistema doble donde una componente es un estrella A0V ($M_V = +0.65$) y la otra es una estrella G2V ($M_V = 4.7$).
- a) 5.35
 - b) 2.03
 - c) 0.63
 - d) -0.1
- [3] Una estrella que se encuentra a 100pc tiene una magnitud aparente de 4. ¿Cuál es su magnitud absoluta?
- a) 1.0
 - b) 0.0
 - c) -1.0
 - d) 10.0
- [4] En la Figura 1 se muestran varios espectros de estrellas, indicar los tipos espectrales aproximados (de arriba para abajo)
- a) A1, B3, K3, O5
 - b) O5, B3, K3, M4
 - c) O5, A1, G2, M4
 - d) A1, O5, M3, K3

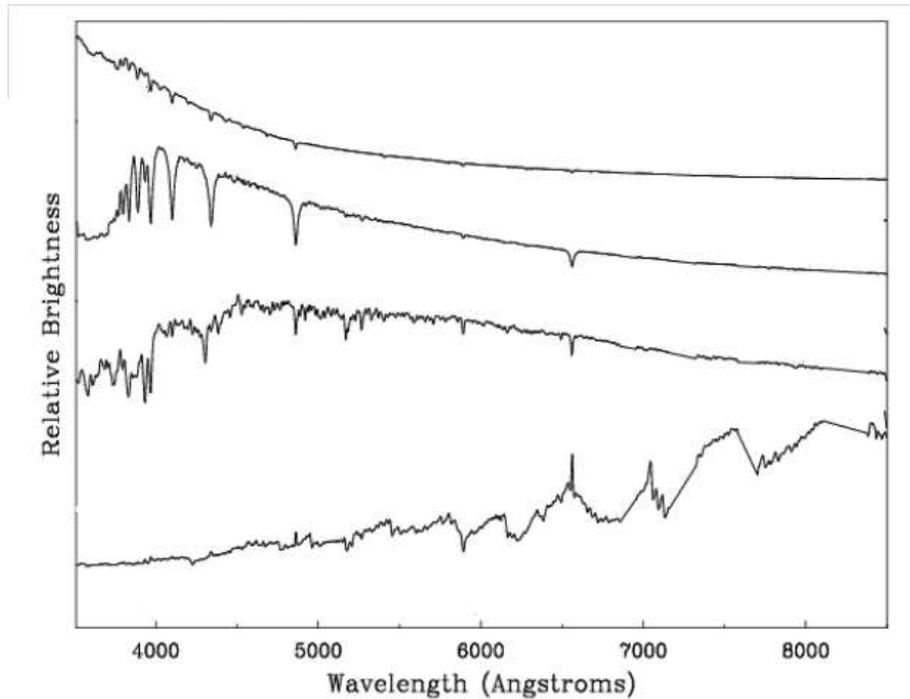


Figura 1: Espectros de varias estrellas

- [5] ¿Cómo se le llama a las estrellas que se encuentran en la zona de alta luminosidad pero baja temperatura de un diagrama HR?
- de Secuencia principal
 - Enanas blancas
 - Gigantes rojas
 - de la Rama horizontal
- [6] Se observa que el periodo orbital de un sistema binario espectroscópico es de 25 días. Ciertas observaciones posteriores revelan que la órbita es circular, con una separación de 0.3 UA y que una de las estrellas es 1.5 veces más masiva que la otra. ¿Cuáles son las masas de cada estrella en unidades de masa solar?
- 3.5 y 2.3
 - 35 y 23
 - 3.5 y 5.2
 - No se pueden determinar

- [7] ¿Cuál de los siguientes conceptos físicos es irrelevante para describir el interior de una estrella de secuencia principal?
- a) presión de radiación
 - b) conducción térmica
 - c) equilibrio hidrostático
 - d) opacidad
- [8] Una estrella de $3M_{\odot}$ tiene una tiene una luminosidad de $93L_{\odot}$, por lo que su duración en la secuencia principal es:
- a) 3.2×10^6 años
 - b) 3.2×10^7 años
 - c) 3.2×10^8 años
 - d) 3.2×10^9 años
- [9] Una estrella aislada de secuencia principal con una masa de $2M_{\odot}$ se convertirá en:
- a) un agujero negro
 - b) una enana blanca
 - c) una estrella de neutrones
 - d) una enana marrón
- [10] La masa de Chandrasekhar, $\sim 1.4 M_{\odot}$, es:
- a) la masa máxima de una estrella en secuencia principal
 - b) la masa máxima de una estrella de neutrones
 - c) la masa máxima de una enana blanca
 - d) la masa mínima para fusionar hidrógeno
- [11] ¿Cuáles son las características que se asocian a la estructura de una estrella de $15 M_{\odot}$ en la secuencia principal? Marca la(s) aseveración(es) correcta(s).
- a) combustión por el ciclo CNO
 - b) envolvente convectiva
 - c) duración de 10×10^{10} años
 - d) temperatura efectiva de 30,000 K

[12] Se observa que una estrella de tipo espectral B0 V tiene un índice de color $B - V = 0.20$. Considerando que el color intrínseco de una estrella B0 es -0.2 , el exceso de color y la absorción en magnitudes A_v que tiene esta estrella son:

- a) $E(B - V) = 0.4$ mag, $A_V = 1.2$ mag
- b) $E(B - V) = -0.4$ mag, $A_V = 1$ mag
- c) $E(B - V) = 0$ mag, $A_V = 12$ mag
- d) $E(B - V) = 0.4$ mag, $A_V = 12$ mag

[13] En el medio interestelar hay una componente que se conoce como Medio Ionizado caliente que tiene una temperatura típica de 10^6 K. ¿A qué tipo de objeto se le atribuye la producción de esta componente?

- a) Estrellas OB
- b) Remanentes de supernova
- c) Rayos cósmicos
- d) Enanas marrón

[14] El espectro característico de una región HII consiste de

- a) continuo muy débil y líneas de emisión intensas
- b) un continuo plano
- c) un continuo tipo cuerpo negro, con líneas en absorción
- d) una emisión continua con líneas de absorción y emisión

[15] Durante la fase de expansión radiativa de un remanente de supernova, la evolución del radio en función del tiempo es: $R_C \propto t^{1/4}$. ¿Cómo evoluciona la velocidad del cascarón?

- a) $\dot{R}_C \propto t^{-3/4}$
- b) $\dot{R}_C \propto t$
- c) $\dot{R}_C \propto t^2$
- d) ninguna de las anteriores

- [16] En las nubes moleculares el hidrógeno está en forma molecular y es muy abundante. Sin embargo, para estudiar a estas nubes se tienen que utilizar otras moléculas. Esto es porque:
- a) las líneas rotacionales del hidrógeno molecular están a frecuencias para las cuales no hay detectores
 - b) las líneas rotacionales del hidrógeno molecular requieren de temperaturas demasiado altas para excitarse, las cuales no están presentes en las nubes moleculares.
 - c) la molécula es simétrica y por lo tanto no tiene dipolo eléctrico.
 - d) el polvo en las nubes absorbe las líneas rotacionales del hidrógeno.
- [17] Los cúmulos galácticos tienen las siguientes propiedades. Marca la aseveración correcta.
- a) muchas estrellas, fuera del plano galáctico, metalicidad solar
 - b) pocas estrellas, fuera del plano galáctico, metalicidad solar $\times 0.01$
 - c) muchas estrellas, en el plano galáctico, metalicidad solar $\times 0.01$
 - d) pocas estrellas, en el plano galáctico, metalicidad solar
- [18] La ley de distribución de brillo de de Vaucouleurs, conocida como $R^{1/4}$, que se aplica a galaxias elípticas, describe para estas galaxias:
- a) la masa de las galaxias
 - b) la existencia de materia oscura
 - c) el brillo superficial como función de la distancia al centro
 - d) la rotación galáctica
- [19] ¿Cómo se podría determinar la distancia a una galaxia muy lejana?
- a) A través del corrimiento al rojo
 - b) Con paralaje trigonométrica
 - c) Con paralaje espectroscópica
 - d) Con las estrellas cefeidas RR Lyrae
- [20] ¿Cuál es la temperatura asociada al fondo cósmico de radiación?
- a) ≈ 102 K
 - b) ≈ 2.7 K
 - c) ≈ 270 K
 - d) cero absoluto

Parte IV
Física Cuántica

- [1] El problema del pozo de potencial infinito en $[0, a]$ tiene como autofunciones (eigenfunciones) y autovalores (eigenvalores) del Hamiltoniano:

$$|\Psi(x, t)_n\rangle = \sqrt{\frac{2}{a}} \operatorname{sen}\left(\frac{n\pi x}{a}\right) e^{-iE_n t/\hbar} \quad (2)$$

$$E_n = \frac{\pi^2 \hbar^2 n^2}{2ma^2} \quad \text{con } n = 1, 2, 3, \dots \quad (3)$$

- Calcular el valor esperado de la posición de la partícula, es decir $\langle x \rangle_n$, si el vector estado del sistema es la n -ésima autofunción $|\Psi(x, t)_n\rangle$.
- Si el sistema se encuentra en el estado $|\Psi(x, t)_2\rangle$ ¿cuál es la probabilidad de obtener $\langle x \rangle_2$ al medir la posición de la partícula? Explicar este resultado.
- ¿Por qué $|\Psi(x, t)_n\rangle$ tiene las extrañas unidades de $[Longitud]^{-1/2}$?

- [2] El Hamiltoniano de cierto sistema está dado por:

$$H = \alpha(L_x^2 + L_y^2) + \beta L_z^2 \quad (4)$$

donde \vec{L} es el momento angular y α y β son ciertas constantes.

- Calcule $[H, \vec{L}]$.
- Calcule $\langle Y_l^{m'} / H / Y_l^m \rangle$, donde Y_l^m son los armónicos esféricos.

- [3] Considere una partícula en un potencial en tres dimensiones:

$$V(x, y, z) = \frac{m\omega^2}{2}(x^2 + y^2 + z^2)$$

- ¿Cuáles son sus energías?
- ¿Cuál es la degeneración de los estados de energía?
- Suponga que la partícula tiene una carga q y se aplica un campo eléctrico de forma que se agrega un término $-qEz$ al potencial. ¿Cuáles son los niveles de energía?
- En presencia del campo eléctrico, ¿cuál es el valor esperado de la posición de la partícula?

Parte V
Física Térmica

[1] Escriba la ecuación que define la entropía y discuta su significado físico en el contexto de:

- a) la 1ra. y la 2da. leyes de la termodinámica;
- b) la mecánica estadística (probabilidad termodinámica);
- c) ¿Cómo, específicamente, este concepto conecta las cantidades termodinámicas macroscópicas y el punto de vista microscópico estadístico? Escriba la ecuación que conecta la temperatura macroscópica T con la entropía S y la energía interna U , y defina físicamente T y U como en mecánica estadística.
- d) Describa una aplicación astronómica del concepto de entropía.

[2] a) Escriba y resuelva la ecuación de equilibrio hidrostático para la densidad de una atmósfera compuesta por un gas monoatómico ideal como función de la altura z sobre el plano $z = 0$. La gravedad g y la temperatura T son constantes con z , y la única fuerza externa es g .

- b) Aplicación, en primera aproximación, del resultado anterior a nuestra galaxia. Para los valores típicos del medio interestelar [en unidades c.g.s, $g = 10^{-9}$, $T = 10000K$, $P(z = 0) = 10^{-12}$], calcule la escala de alturas (*scale-height*) de la densidad, si la única forma de presión P es térmica. Tome $P(z = 3kpc) = 0$. El gas está compuesto por átomos de hidrógeno; cada átomo tiene una masa de 1.6×10^{-24} gramos.

[3] Un mol de un cierto gas se encuentra en un recipiente de 25 litros a 1 atm. Calcular el cambio de entropía en cada uno de los siguientes procesos:

- a) En un primer proceso cuasi-estático se transfiere este gas a un recipiente aislado con volumen de 50 litros (conservando su temperatura).
- b) Estando en este recipiente se permite que el sistema se ponga en equilibrio térmico con el medio que lo rodea a $T=298.15K$.

Considere que la capacidad calorífica molar es $c_v=12.47 J K^{-1} mol^{-1}$.

*** Algunas constantes requeridas son provistas en una hoja de este examen. ***