

POSGRADO EN ASTROFÍSICA  
Examen de Admisión  
para ingresar al semestre 2015-2  
Fecha de examen: 26 de Noviembre 2014

MECÁNICA CUÁNTICA

**Duración del examen: 1.5 horas. Seleccionar y responder 3 problemas**

**Responder las preguntas en hojas separadas (por una sola cara)  
y no olvidar escribir su nombre y/o clave en cada una de las hojas.**

1. Tenemos una partícula de spin  $1/2$ . En la base  $\{|+\rangle, |-\rangle\}$ , que corresponde a los estados “up” y “down” del spin, el Hamiltoniano es:

$$H = \hbar\omega \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}.$$

- (a) Supongamos que a  $t = 0$ , el sistema se encuentra en el estado  $|+\rangle$ . Determine el estado en un tiempo  $t$  posterior ( $t > 0$ ).
- (b) Calcule el valor esperado de la energía al tiempo  $t > 0$ .
2. Sabemos que el producto vectorial de un vector consigo mismo es cero.
- (a) Demuestre, sin embargo, que el producto vectorial del operador momento angular orbital  $\vec{L}$  consigo mismo no es cero:  $\vec{L} \times \vec{L} \neq 0$ .
- (b) Calcule  $(\vec{L} \times \vec{L})Y_l^m$ , donde  $Y_l^m$  es un armónico esférico de grado  $l$  y orden  $m$ .
3. La función de onda de una partícula a un tiempo  $t$  vale:

$$\Psi(x) = A(a^2 - x^2)$$

si  $x$  está entre  $-a$  y  $+a$ , y cero fuera de este rango de posiciones.

- (a) Calcule la constante de normalización  $A$ .
- (b) Calcule  $\langle x \rangle$ ,  $\langle x^2 \rangle$ ,  $\langle p \rangle$  y  $\langle p^2 \rangle$ , donde  $x$  y  $p$  representan, respectivamente, la posición y el momento de la partícula.
- (c) Calcule la incertidumbre sobre la posición de la partícula ( $\sigma_x$ ) y sobre su momento ( $\sigma_p$ ). Verifique que sus resultados cumplen con el principio de incertidumbre de Heisenberg.
4. Considere un sistema de dos partículas, con una fuerza de interacción entre sí, y en presencia de una fuerza uniforme externa. El potencial de interacción se puede representar por  $V(x_1 - x_2)$  y las partículas 1 y 2 están sujetas a las fuerzas externas  $F_1$  y  $F_2$ .
- (a) Escribe el Hamiltoniano del sistema.
- (b) Transformar el Hamiltoniano al marco de centro de masa
- (c) Usando el Hamiltoniano del segundo inciso y la ecuación de Schrödinger, obtenga una ecuación para el movimiento del centro de masa y otra para el movimiento interno.
- (d) El hecho que se pudo realizar el paso del inciso 3 (es decir, separar la ecuación de Schrödinger en estas dos partes) depende de alguna propiedad de las fuerzas externas. ¿Cual es?

POSGRADO EN ASTROFÍSICA  
Examen de Admisión  
para ingresar al semestre 2015-2  
Fecha de examen: 25 de Noviembre 2014

**ELECTRODINÁMICA**

**Duración del examen: 1.5 horas. Seleccionar y responder 3 problemas**

**Responder las preguntas en hojas separadas (por una sola cara)  
y no olvidar escribir su nombre y/o clave en cada una de las hojas.**

1. Tenemos una distribución esférica de carga eléctrica con las siguientes características (ver Figura 1):

Para  $r < R_1$ ,  $\rho = Kr^{-1}$ , con carga total  $+Q$

Para  $R_1 < r < R_2$ ,  $\rho = 0$

En  $r = R_2$ , hay una cáscara muy delgada que lleva la carga  $-Q$

Utilice el teorema de Gauss para encontrar el campo eléctrico  $\mathbf{E}$  en función de  $r$ .

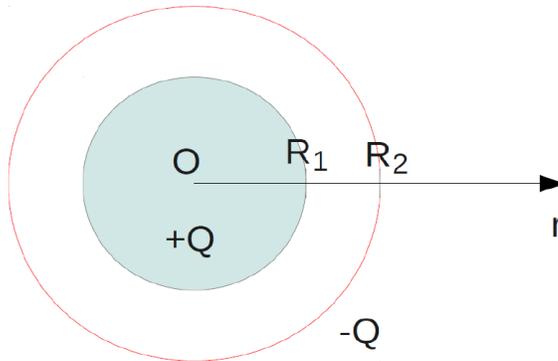


Figure 1: Distribución de cargas en el Problema 1.

2. Una corriente  $I$  estacionaria fluye por un alambre cilíndrico largo de radio  $a$ . Encontrar el campo magnético, tanto dentro como fuera del alambre, si:
- (a) La corriente se distribuye uniformemente sobre la superficie exterior del alambre.
  - (b) La corriente se distribuye de tal manera que  $J$  es proporcional a  $s$ , donde  $s$  es la distancia desde el eje del cilindro.
3. Un bucle cuadrado de alambre, de lado  $a$ , se encuentra sobre una mesa a distancia  $s$  de un alambre recto muy largo, que lleva una corriente  $I$ , como se muestra en la Figura 2.

- (a) Encontrar el campo magnético  $\mathbf{B}$  a través del bucle.
- (b) Si alguien ahora jala del bucle en dirección opuesta al alambre, a una velocidad  $v$ , ¿qué fuerza electromotriz se genera?, ¿en qué dirección fluye la corriente?
- (c) Qué pasa si el bucle se jala hacia la derecha a una velocidad  $v$ , en lugar de hacia arriba?

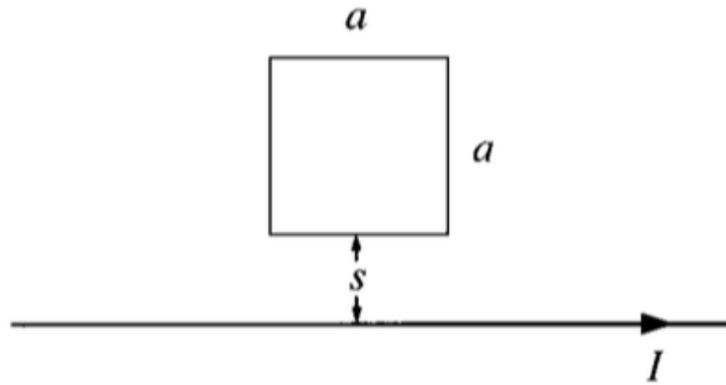


Figure 2: Configuración para el problema 3.

4. La ecuación de una onda plana esta dada por:

$$\mathbf{E}(t) = 2 \sin\left(\frac{2\pi}{\lambda}y + 4\pi \times 10^{15}t\right) \hat{\mathbf{z}} \quad \text{V m}^{-1},$$

$$\mathbf{B}(t) = \mathbf{B}_0 \sin\left(\frac{2\pi}{\lambda}y + 4\pi \times 10^{15}t\right) \quad \text{Tesla},$$

donde el tiempo  $t$  está en segundos. El índice óptico del material es de 1.5.

- (a) ¿En qué dirección se propaga la onda?
- (b) ¿Qué vale  $\mathbf{B}_0$  (magnitud y dirección)?
- (c)Cuál es la longitud de onda ( $\lambda$ ) en metros?

POSGRADO EN ASTROFÍSICA  
Examen de Admisión  
para ingresar al semestre 2015-2  
Fecha de examen: 26 de Noviembre 2014

MECÁNICA CLÁSICA

**Duración del examen: 1.5 horas. Seleccionar y responder 3 problemas**

**Responder las preguntas en hojas separadas (por una sola cara)  
y no olvidar escribir su nombre y/o clave en cada una de las hojas.**

1. Una partícula de masa  $m$  se mueve bajo la influencia de una fuerza central

$$\mathbf{F} = -c^2 \frac{\mathbf{r}}{r^{\frac{5}{2}}},$$

donde  $c$  es una constante.

- (a) Encuentre el radio de cualquier órbita circular en términos del momento angular.
- (b) Derive la frecuencia de pequeñas oscilaciones radiales en torno a la órbita circular.
2. Una partícula de masa  $m$  sólo se puede mover en un plano vertical que rota con la velocidad angular  $\boldsymbol{\Omega} = \Omega \hat{\mathbf{z}}$  (donde  $\hat{\mathbf{z}}$  es el vector unitario en la dirección de la vertical ascendente). Encuentre las ecuaciones del movimiento en el marco de referencia del sistema rotante, y resuelva para las coordenadas cilíndricas  $(R, \theta, z)$ , tomando en cuenta la fuerza de gravedad en la dirección  $-\hat{\mathbf{z}}$ .
3. Un avión tiene que volar desde su punto de partida hasta su destino, localizado a 800 km exactamente al norte. Supondremos que su velocidad durante todo el viaje es constante e igual a 800 km  $\text{h}^{-1}$ .
- (a) Hay viento que sopla desde el este a una velocidad de 30  $\text{m s}^{-1}$ . ¿Hacia qué dirección debe volar el piloto? ¿En cuánto tiempo llegará el avión a su destino?
- (b) Supongamos ahora que la velocidad del viento aumente de 30 a 50  $\text{m s}^{-1}$  justo antes del despegue y que el piloto no tome en cuenta este cambio. ¿Dónde estará el avión en el tiempo de llegada esperado en relación con su destino?
4. Consideremos un aro de radio  $R$  y masa  $M$  que puede girar sin fricción alrededor de su eje de simetría ( $Oz$ ). Puede imaginarlo como una rueda de bicicleta que gira alrededor de su eje, pero donde podemos despreciar los rayos. Inicialmente, el aro está en reposo. Ignoraremos la gravedad en todo el problema.
- (a) Calcule el momento de inercia  $I_z$  del aro relativamente al eje ( $Oz$ ).
- (b) Lanzamos un pedazo de plastilina de masa  $m$  con una velocidad  $\mathbf{v}$  que se pega en el aro en la posición  $M$ . Calcule la velocidad angular de rotación final  $\omega$  de la rueda.

POSGRADO EN ASTROFÍSICA  
Examen de Admisión  
para ingresar al semestre 2015-2  
Fecha de examen: 25 de Noviembre 2014

**TERMODINÁMICA**

**Duración del examen: 1.5 horas. Seleccionar y responder 3 problemas**  
**Responder las preguntas en hojas separadas (por una sola cara)**  
**y no olvidar escribir su nombre y/o clave en cada una de las hojas.**

1. (a) Considerando que en una transformación adiabática, un gas ideal obedece la ecuación de estado  $pV^\gamma = \text{constante}$  (donde  $\gamma$  es una constante), calcule una expresión para el trabajo  $W$  hecho por el gas cuando se transforma adiabáticamente del estado termodinámico inicial  $(p_1, V_1, T_1)$  al estado final  $(p_2, V_2, T_2)$ .
- (b) Si dicho gas se expande de modo que el volumen final es 3 veces el volumen inicial, ¿cómo se compara la presión final de esta transformación con respecto a la presión final de una transformación isotérmica con el mismo estado inicial  $(p_1, V_1, T_1)$  y el mismo volumen final  $V_2$ .
2. La energía interna de un gas cuya partición sigue la distribución de Maxwell-Boltzmann es:

$$U = Nk_B T^2 \frac{d \ln Z}{dT},$$

donde la función de partición  $Z$  está dada por:

$$Z = \sum_i g_i e^{-E_i/k_B T},$$

donde  $E_i$  es la energía del estado  $i$ , mientras que  $g_i$  es la constante de probabilidad intrínseca del estado  $i$ ;  $N$  es el número total de partículas en el sistema.

- (a) Recordando que la energía interna del gas es  $U = N\langle E \rangle$ , donde  $\langle E \rangle$  es la energía promedio por partícula, derive una expresión para  $\langle E \rangle$  en términos de  $Z$  y  $E_i$ .
- (b) Discuta sobre por qué la expresión para  $\langle E \rangle$  tiene la forma encontrada.
3. Considere un gas donde las partículas sólo tienen energía cinética debido a la translación de su centro de masa.
  - (a) Calcule la energía cinética promedio de una molécula de gas a  $25^\circ \text{C}$ . Expresar su resultado en Joules (J) y en electronvolts (eV).
  - (b) Calcule la velocidad rms (promedio) de las partículas de dicho gas para gases diatómicos compuestos de (i) hidrógeno ( $\text{H}_2$ ); (ii) oxígeno ( $\text{O}_2$ ); (iii) nitrógeno ( $\text{N}_2$ ).
4. En un ciclo de Carnot, la expansión isotérmica de un gas ideal tiene lugar a 412 K y la compresión isotérmica a 297 K. Durante la expansión se transfieren al gas 2090 J de energía calorífica. Determine
  - (a) el trabajo llevado a cabo por el gas durante la expansión isotérmica,
  - (b) el calor rechazado por el gas durante la compresión isotérmica,
  - (c) el trabajo efectuado sobre el gas durante la compresión isotérmica.
  - (d) Calcule la eficiencia termodinámica de este ciclo. (Ayuda: puede servirle recordar que para el ciclo de Carnot existe una relación simple entre los calores intercambiados durante las partes isotérmicas y sus temperaturas.)

INSTITUTO DE ASTRONOMÍA

# EXAMEN DE ADMISIÓN

Otoño de 2014

a 29 de noviembre de



2014

---

La duración del examen es de 1-1/2 hora por área de conocimiento.

Part I  
Astronomía General

1. Un par de estrellas binarias tiene magnitudes aparentes  $m_1 = 5$  y  $m_2 = 5.5$ .  
¿Cuál es la magnitud observada del par?
  - a) 4.1 mag
  - b) 4.47 mag
  - c) 5.25 mag
  - d) 5.4 mag
  - e) 10.5 mag
  
2. La galaxia de Andrómeda, M31, se encuentra a 725 kpc de distancia. ¿Cuál es su módulo de distancia?
  - a) 0.7 Mpc
  - b) 5.8 mag
  - c) 24.3 mag
  - d) 29.3 mag
  - e) 72.5 mag
  
3. ¿A qué distancia de nosotros se encuentra una estrella que tiene ángulo de paralaje de 0.02 segundos de arco (0.02")?
  - a) 5 AU
  - b) 5 parsec
  - c) 50 AU
  - d) 50 parsec
  - e) 500 años luz
  
4. La longitud de onda que corresponde a la intensidad máxima del espectro del Sol es 5026 Å y la temperatura efectiva del Sol es 5770 K. ¿Cuál es la longitud de onda que corresponde a la intensidad máxima del polvo de un disco circunestelar que se encuentra a la temperatura de 70K en micras?
  - a) 0.5 micras
  - b) 40 micras
  - c) 100 micras
  - d) 400 micras
  - e) 400000 micras

5. En un sistema binario eclipsante de estrellas iguales cuyas componentes se mueven en órbitas circulares. El sistema presenta un periodo de 3 meses y una semi-amplitud de velocidades de 90 km/s. Determina el radio de las órbitas individuales y la masa total del sistema.
- a) 1.01AU, 11.2M<sub>⊙</sub>
  - b) 2.5AU, 13.5M<sub>⊙</sub>
  - c) 0.25AU, 27M<sub>⊙</sub>
  - d) 0.75AU, 54M<sub>⊙</sub>
  - e) 7.5AU, 112M<sub>⊙</sub>
6. El periodo de rotación de una pareja binaria es 1 año, y el semi eje mayor de la órbita es de una unidad astronómica. Si la masa de una de las estrellas es 0.5 M<sub>⊙</sub>. ¿Cuál es la masa de la compañera?
- a) 1 M<sub>Tierra</sub>
  - b) 173 M<sub>Tierra</sub>
  - c) 1.73 M<sub>Jupiter</sub>
  - d) 0.5 M<sub>⊙</sub>
  - e) 2 M<sub>⊙</sub>
7. La secuencia principal corresponde es la fase más prolongada de la vida de las estrellas y corresponde a cuando en el centro de la estrella está ocurriendo:
- a) la quema de Hidrógeno en Helio
  - b) la quema de Helio en Carbono
  - c) la quema de Carbono, Oxígeno y Neón
  - d) la quema de Hierro
  - e) la quema de Hidrógeno y de Helio
8. Compara la combustión nuclear por la Cadena p-p con la que ocurre por Ciclo CNO. Marca la aseveración correcta.
- a) ocurre a menor temperatura, si ocurre convección, requiere C, N, O
  - b) ocurre a menor temperatura, no ocurre convección, no requiere C, N O
  - c) ocurre a la misma temperatura, depende de la composición química
  - d) ocurre a mayor temperatura, no ocurre convección, requiere C, N, O
  - e) ocurre a mayor temperatura, si ocurre convección, no requiere C, N, O

9. ¿De qué manera terminará su vida una estrella de 1.5 Msol?
- Explosión de supernova + estrella de neutrones
  - Estrella de neutrones sin remanente gaseosa
  - Explosión de supernova + enana blanca
  - Enana blanca sin remanente gaseosa
  - Nebulosa planetaria + enana blanca
10. ¿Porqué se utilizan las variables tipo cefeida para determinar las distancias?
- Porque tienen el mismo periodo
  - Porque son del mismo tamaño
  - Porque son del mismo brillo
  - Porque se brillo se puede determinar de su periodo, aunque no son muy brillantes
  - Porque son muy brillantes, y su brillo se puede determinar de su periodo
11. ¿Cuál es la masa virial para una nube molecular con  $\langle V_r \rangle > 5$  km/s y  $R = 10$  pc?
- $5 \times 10^3 M_\odot$
  - $5 \times 10^4 M_\odot$
  - $5 \times 10^5 M_\odot$
  - $5 \times 10^6 M_\odot$
  - $5 \times 10^7 M_\odot$
12. Se observa que una estrella de tipo espectral B0 V que tiene un índice de color  $B - V = 0.20$ . Considerando que el color intrínseco de una estrella B0 es  $B - V = -0.2$ , el exceso de color y la absorción en magnitudes  $A_v$  que tiene esta estrella son:
- $E(B-V) = 0.4$  mag,  $A_V=1.2$  mag
  - $E(B-V) = -0.4$  mag,  $A_V=1$  mag
  - $E(B-V) = 0$  mag,  $A_V=12$  mag
  - $E(B-V) = -0.4$  mag,  $A_V=0$  mag
  - $E(B-V) = 0.4$  mag,  $A_V=12$  mag

13. ¿Que resolución en frecuencia es necesaria para nuestro detector para observar la línea de 21 cm con una resolución de 0.1 km/s?
- a)  $4.3 \times 10^{15}$  Hz
  - b)  $1.4 \times 10^9$  Hz
  - c)  $3 \times 10^6$  Hz
  - d)  $5 \times 10^2$  Hz
  - e)  $3 \times 10^6$  Hz
14. El espectro característico de una nebulosa de reflexión consiste de
- a) líneas intensas de recombinación y líneas de excitación de colisional
  - b) líneas intensas de recombinación sin líneas de excitación de colisional
  - c) un continuo tipo cuerpo negro, con líneas en absorción
  - d) espectro tipo estelar con líneas en emisión
  - e) espectro tipo estelar con líneas en absorción
15. Dos regiones HII están excitadas por estrellas idénticas, pero tienen diferente densidad. La nebulosa A tiene 8 veces mayor densidad que la nebulosa B. ¿Cómo compara el tamaño de la nebulosa A respecto al de la nebulosa B?
- a)  $R_A$  es 8 veces menor que  $R_B$
  - b)  $R_A$  es 4 veces menor que  $R_B$
  - c) Son iguales
  - d)  $R_A$  es 2 veces mayor que  $R_B$
  - e)  $R_A$  es 8 veces mayor que  $R_B$
16. El diagrama color-magnitud de los cúmulos se usa para determinar sus distancias. ¿Qué elemento se utiliza?
- a) la secuencia principal
  - b) la magnitud de las estrellas más calientes
  - c) la magnitud de las estrellas más brillantes
  - d) la magnitud de las estrellas más débiles
  - e) la magnitud de las estrellas variables Cefeidas

17. La distribución de brillo superficial de una galaxia espiral se puede ley de de Vaucouleurs, conocida como  $R^{-1/4}$ , se aplica a galaxias elípticas y describe, para estas galaxias:
- a) la masa de las galaxias
  - b) el brillo superficial como función de la distancia a centro
  - c) la temperatura de las estrellas
  - d) la rotación galáctica
  - e) la existencia de materia oscura
18. La diferencia principal entre las galaxias Seyferts 1 y 2:
- a) sus edades
  - b) la presencia, o no, de un agujero negro en el centro
  - c) la presencia, o no, de brazos espirales, respectivamente
  - d) la presencia, o no, de un núcleo compacto, respectivamente
  - e) la visibilidad, o no, de las líneas anchas de HI (Balmer), HeI y HeII
19. Si la luz de un cuasar varía en una escala de tiempo de 100 días. ¿Cuál es el tamaño de la región de emisión?
- a)  $1 \times 10^7$  km
  - b) 2.47 AU
  - c) 100 AU
  - d) 0.1 parsec
  - e) 100 parsec
20. La Gran Explosión es una teoría que pretende explicar el inicio del Universo. ¿Cuáles de las observaciones que se mencionan a continuación corroboran esta teoría? (i) el corrimiento al rojo de las galaxias, (ii) la curva de rotación de las galaxias espirales, (iii) la radiación de fondo de 3K, (iv) la edad de las estrellas más viejas de la galaxia, (v) el valor primordial del He. Las observaciones correctas son:
- a) i, ii, v
  - b) i, iii, iv
  - c) i, iii, v
  - d) ii, iii, iv
  - e) todas

---

 CONSTANTES FÍSICAS Y FACTORES DE CONVERSIÓN
 

---

Velocidad de la luz	$c$	$3.00 \times 10^8 \text{ m s}^{-1}$
Carga del electrón	$e$	$1.60 \times 10^{-19} \text{ C}$
Masa del electrón	$m_e$	$9.11 \times 10^{-31} \text{ kg}$
Constante de Planck	$h$	$6.63 \times 10^{-34} \text{ J s}^{-1}$
	$\hbar$	$1.054 \times 10^{-34} \text{ J s}^{-1}$
	$h$	$4.14 \times 10^{-15} \text{ eV s}$
	$hc$	$12.4 \text{ keV \AA}$
Constante de gravedad	$G$	$6.67 \times 10^{-11} \text{ N m}^2 \text{ kg}^{-2}$
Permitividad del vacío	$\epsilon_0$	$8.85 \times 10^{-12} \text{ N}^{-1} \text{ m}^{-2} \text{ C}^2$
Permeabilidad magnética del vacío	$\mu_0$	$1.26 \times 10^{-6} \text{ m kg C}^{-2}$
Número de Avogadro	$N_A$	$6.02 \times 10^{23} \text{ mol}^{-1}$
Constante de Boltzmann	$k$	$1.38 \times 10^{-23} \text{ J K}^{-1}$
Constante de los gases	$R$	$8.31 \text{ J K}^{-1} \text{ mol}^{-1} \quad 1 \text{ kmol} = 10^3 \text{ mol}$
Magnetón de Bohr	$\mu_B = \frac{e\hbar}{2m_e c}$	$5.788 \times 10^{-9} \text{ eV G}^{-1}$
Electrón volt	$1 \text{ eV}$	$1.602 \times 10^{-19} \text{ J}$
Joule	$\text{J}$	$10^7 \text{ erg}$
Angstrom	$\text{A}$	$10^{-10} \text{ m} = 0.1 \text{ nm}$
statvolt/cm (campo eléctrico)	statv/cm	$3 \times 10^4 \text{ volt/m} \quad (1 \text{ volt/m} = 1 \text{ N/C})$
Atmósfera	$atm$	$= 1.01325 \text{ bar} = 101,325 \text{ Pa}$
Parsec	pc	$3.086 \times 10^{16} \text{ m}$
Unidad Astronomica	AU	$1.496 \times 10^{11} \text{ m}$
Masa Solar	$M_\odot$	$1.989 \times 10^{30} \text{ kg}$
Masa de Jupiter	$M_{\text{Jupiter}}$	$1.899 \times 10^{27} \text{ kg} = 9.55 \times 10^{-4} M_\odot$
Masa de la Tierra	$M_{\text{Tierra}}$	$5.972 \times 10^{24} \text{ kg} = 3.00 \times 10^{-6} M_\odot$

---