UNAM POSGRADO
Astronomía

INSTITUTO DE ASTRONOMÍA

Y

CENTRO DE RADIOASTRONOMÍA Y ASTROFÍSICA

EXAMEN DE ADMISIÓN

Otoño de 2015

18 y 19 de junio de 2015

La duración del examen es de 1.5 horas por área de conocimiento.

Son 5 áreas de conocimiento: Mecánica Clásica, Electromagnetismo, Mecánica Cuántica, Termodinámica y Astronomía General

Realice las áreas pertinentes. Seleccione 2 problemas por área.

Responda las preguntas en hojas separadas (por una sola cara).

Escriba su clave en cada una de las hojas utilizadas.

NÚMEROS ÚTILES

Velocidad de la luz	c	3.00×10^{8} m s^{-1}
Carga del electrón	e	1.60×10^{-19} C
Masa del electrón	m_e	9.11×10^{-31} kg
Constante de Planck	h	6.63×10^{-34} J s^{-1}
	$\hbar$	1.054×10^{-34} J s^{-1}
	h	4.14×10^{-15} eV s
	hc	12.4 keV Å
Constante de Stefan-Boltzmann	σ	5.67×10^{-5} erg cm^{-2} K^{-4} s^{-1}
Constante de radiación	$a = 4\sigma/c$	7.566×10^{-15} erg cm^{-3} K^{-4}
Constante de gravedad	G	6.67×10^{-11} N m^{2} kg^{-2}
Permitividad del vacío	ϵ_0	8.85 10^{-12} N^{-1} m^{-2} C^{2}
Permeabilidad magnética del vacío	μ_0	1.26×10^{-6} m kg C^{-2}
Número de Avogadro	N_A	6.02×10^{23} mol^{-1}
Constante de Boltzmann	k	1.38×10^{-23} J K^{-1}
Constante de los gases	R	8.31 J K^{-1} mol^{-1}
Magnetón de Bohr	$\mu_B = \frac{e\hbar}{2m_e c}$	5.788×10^{-9} eV G^{-1}.
Electrón volt	1 eV	1.602×10^{-19} J
Joule	J	10^{7} erg
Angstrom	A	10^{-10} m = 0.1 nm
statvolt/cm (campo eléctrico)	statv/cm	3×10^{4} volt/m (volt/m =N/C)
Atmósfera	atm	= 1.01325 bar = 101, 325 Pa
Constante gravitacional	G	4,299 $\times 10^{-9}$ Mpc $M_{\odot}^{-1}$ (km/s)^{2}
Masa solar	1 $M_{\odot}$	1.99×10^{33} g
Radio solar	1 $R_{\odot}$	6.96×10^{10} cm
Luminosidad solar	1 $L_{\odot}$	3.827×10^{33} erg s^{-1}
Unidad Astronómica	1 AU	1.496×10^{13} cm
Parsec	1 pc	3.086×10^{18} cm

PARTE 1

MECÁNICA CUÁNTICA

Examen de Mecánica Cuántica

Problema 1.

Considerando el modelo de Bohr,

a. Calcule las longitudes de onda de las dos primeras lneas de las series de Lyman, Balmer y Paschen para hidrógeno. Las lneas de Lyman, Balmer y Paschen resultan de transiciones entre los niveles , y, respectivamente, y sus niveles superiores.

b. Cómo difieren las longitudes de onda para las dos primeras lneas de la serie de Lyman en hidrgeno y deuterio (hidrgeno con un neutrón)?

c. Calcule las longitudes de onda lmites para las series de Lyman, Balmer y Paschen en el ión de helio ionizado. Encuentre la función de onda de una partícula en un pozo esférico de potencial infinito

Problema 2.

Encuentre la función de onda de una partícula en un pozo esférico de potencial infinito

$$V(r) = \begin{cases} 0, \text{ si } r < a \\ \infty, \text{ si } r > a \end{cases}$$

para el caso de $\ell = 0$.
[*Hint*: En coordenadas esféricas $r\psi = 0$ en $r = 0$ y la ecuación de Schrödinger es:

$$\left[-\frac{\hbar^2}{2m} \frac{1}{r} \frac{\partial^2}{\partial r^2} r + \frac{L^2}{2mr^2} + V(r) \right] \psi(r, \theta, \phi) = E\psi(r, \theta, \phi), \text{ y } \int_0^a \sin^2 kr \, dr = \frac{a}{2} - \frac{1}{4k} \sin 2ka$$

Problema 3.

Probar que los operadores

$\hat{\mathrm{P}}$ = - i$\hbar$ $\frac{\partial}{\partial x}$ y $\hat{\mathrm{X}}$ = x son hermíticos, y calcule el conmutador de estos operadores.

PARTE 2

ASTRONOMÍA GENERAL

1. (Coordenadas) ¿Cuáles son las coordenadas ecuatoriales del Sol el día 22 de septiembre?

   a) RA=00h00m00.0s; DEC=+90d00m00s
   b) Depende de las coordenadas del lugar en el que estamos
   c) RA=12h00m00.0s; DEC=+00d00m00s
   d) RA=12h00m00.0s; DEC=-90d00m00s
   e) Depende de las coordenadas del lugar en el que estamos y de la hora en la que las queremos conocer

2. (Óptica) ¿Cuál es el diámetro mínimo del espejo de un telescopio para que pueda resolver, en la banda V, dos estrellas que se encuentran a una distancia angular de 0.25", en condiciones de seeing ideal?

   a) 0.06 m
   b) 0.56 m
   c) 5.66 m
   d) 56.6 m
   e) Depende del tipo de telescopio

3. (Magnitudes) La estrella Antares tiene un índice de color $(B - V) = 1.83$, y una magnitud aparente B=2.79. Calcule su magnitud absoluta en la banda V, si la distancia de la estrella es de 170 pc.

   a) -4.43
   b) +0.96
   c) -3.36
   d) 0.00
   e) -5.19

4. (Magnitudes) ¿Cuál es la magnitud observada de un sistema triple de estrellas, cuyas componentes tienen magnitudes aparentes de 1.5, 2 y 4, respectivamente?

   a) 0.9 mag
   b) 2.1 mag
   c) 3.4 mag
   d) 4.3 mag

e) Ninguna de las anteriores

5. (Distancias) ¿A qué distancia de nosotros se encuentra una estrella que tiene un ángulo de paralaje medido de 0.04 segundos de arco (0.04")?

   a) 2.5 unidades astronómicas
   b) 2.5 parsec
   c) 25 unidades astronómicas
   d) 25 parsec
   e) Ninguna de las anteriores

6. (Distancias) La linea del hidrógeno Hα, emitida por el gas en una galaxia, se observa a una longitud de onda de 7245 Å, cuando su longitud de onda en reposo es 6563 Å. Calcúlese la distancia a dicha galaxia.

   a) 43.8 Mpc
   b) 43.8 millones de años luz
   c) 438.7 Mpc
   d) 438.7 millones de años luz
   e) 0.104 Mpc

7. (Binarias) Un sistema eclipsante binario de doble línea tiene dos componentes que siguen una órbita circular con un periodo orbital de 5 días. Si la amplitud de la curva de velocidades radiales es de 150 km/s para la componente primaria y es de 200 km/s para la componente secundaria, ¿cuáles son las masas de las dos componentes estelares?

   a) $M_1 = 8M_\odot$ y $M_2 = 7.3M_\odot$
   b) $M_1 = 2.5M_\odot$ y $M_2 = 1.5M_\odot$
   c) $M_1 = 16M_\odot$ y $M_2 = 10.2M_\odot$
   d) $M_1 = 12.6M_\odot$ y $M_2 = 9.4M_\odot$
   e) No se puede calcular

8. (Estrellas) ¿Porqué se utiliza, en los diagramas H-R, el color (por ejemplo B-V) en uno de los ejes?

   a) Porque esta directamente relacionado con la temperatura estelar

b) Porque no depende de la distancia entre las estrellas y observador

c) Porque no depende de la extinción

d) Porque esta directamente relacionado con la lumoinosidad estelar

e) Porque es una cantidad que se puede medir de forma sencilla con observaciones desde la tierra

9. (Estructura estelar) ¿Cómo termina la vida una estrella de 1 Masa solar?

   a) Estrella de neutrones

   b) Supernova de tipo Ia

   c) Enana blanca

   d) Agujero negro

10. (Medio interestelar) ¿Cuál es la fuente principal de energía en las proto-estrellas?

    a) Cadena protón-protón

    b) Cyclo CNO

    c) Gravedad

    d) Reacción tripe alfa

11. (Medio interestelar) ¿Qué proceso genera la línea de 21 cm?

    a) Una transición de la serie Paschen

    b) Una transición de la serie de Balmer

    c) Transiciones cuadrupolares en el infrarrojo lejano

    d) El cambio de spin del hidrógeno neutro

12. (Medio interestelar) Son ejemplos de líneas de recombinación

    a) Hα, Hβ, Hγ

    b) $[OIII]\lambda5007, [OII]\lambda3727$

    c) N+ , O++

    d) $[SII]\lambda$ 6717, 6731

13. (Medio interestelar) Una nube de gas colapsará si:

    a) La nube esta formada solo de hidrógeno neutro

b) La masa de la nube es menor que la masa de Jeans

c) La masa de la nube es mayor que la masa de Jeans

d) La densidad de la nube es baja

14. (Galaxias) ¿Qué perfil describe correctamente la densidad superficial de los discos de galaxias espirales?

    a) Perfil de Sersic con índice de 5

    b) Perfil de de Vaucouleur

    c) Perfil gaussiano

    d) Perfil exponencial

15. (Estructura galáctica) Conociendo la distancia del Sol al centro galáctico, que gira alrededor de la Vía Láctea a una velocidad de 220 km/s, y asumiendo una órbita circular y kepleriana, estimar la cantidad de masa que existe dentro de la órbita del Sol.

    a) $8 \times 10^{12} M_{\odot}$

    b) $5 \times 10^{9} M_{\odot}$

    c) $12 \times 10^{10} M_{\odot}$

    d) $7.5 \times 10^{10} M_{\odot}$

16. (Estructura galáctica) ¿Por qué fallaron los primeros estudios que pretendían describir la forma de nuestra Galaxia ?

    a) Se consideraba que la Galaxia era plana.

    b) No se tomo en cuanta la extinción estelar.

    c) No se tomo en cuanta la existencia de otras Galaxias.

    d) Porque en esta época se consideraba un modelo geocéntrico

17. (Galaxias) Empleando el teorema del Virial, calcula la masa del cúmulo de Coma, cuya dispersión de velocidades es de 880 km/s medida al radio que contiene la mitad de la luminosidad total del cúmulo (1.5 Mpc).

    a) $2.5 \times 10^{15} M_{\odot}$

    b) $2 \times 10^{30} kg$

    c) $1.74 \times 10^{22} M_{\odot}$

    d) $7.14 \times 10^{12} M_{\odot}$

18. (Galaxias y cosmología) La relación Faber-Jackson se refiere a:

   a) Una relación entre la luminosidad de una galaxia elíptica y su velocidad de dispersión
   b) Una relación entre la luminosidad de una galaxia espiral y su velocidad de rotación
   c) Una relación entre la luminosidad y la metalicidad
   d) Ninguna de las anteriores

19. (Cosmología) La longitud de onda que corresponde a la intensidad máxima del espectro del Sol es 5026 Å y la temperatura efectiva del Sol es 5770 K. ¿Cuál es la longitud de onda que corresponde a la radiación de fondo cósmica?

   a) 2 μm
   b) 1 mm
   c) 3000 Å
   d) 400 Hz

20. (Cosmología) Predice la existencia de la energía oscura

   a) La métrica de Friedmann-Lemaitre-Robertson-Walker
   b) La constante de Hubble
   c) La aceleración del Universo
   d) La curva de rotación de las galaxias

PARTE 3

TERMODINÁMICA

Evaluación de Física Térmica

El examen consta de tres problemas. Todos los problemas resueltos correctamente equivalen al 100%. El examen debe resolverse en 1.5 horas o menos.

Problema 1. Considere un gas ideal el cual se comprime hasta alcanzar la mitad de su volumen original. Encuentre y compare el trabajo realizado si el proceso se lleva a cabo:
a) a presión constante,
b) isotérmicamente,
c) adiabáticamente.
¿En qué caso se requiere más trabajo? ¿Por qué?

Problema 2. A partir de la función de Planck para la intensidad de un cuerpo negro, demuestre que la potencia irradiada por unidad de área por dicho cuerpo negro (cantidad conocida como 'flujo', con unidades de, por ejemplo, erg s^{-1} cm^{-2}) es $F = \sigma T^4$, donde σ es una constante de proporcionalidad. Este resultado es conocido como 'Ley de Stefan-Boltzmann'. Nota: no es necesario calcular el valor de σ.

Problema 3. Considere un gas ideal en un ciclo de Otto. El ciclo de Otto consiste de cuatro transformaciones en el siguiente orden: compresión adiabática $\rightarrow$ presurización isocórica $\rightarrow$ expansión adiabática $\rightarrow$ despresurización isocórica. Demuestre que la eficiencia ϵ del ciclo de de Otto está dada por:
$\epsilon = 1 - r^{1-\gamma}$,
donde $r = V_1/V_2$ es el cociente de compresión ($V_1 > V_2$), y γ es la constante adiabática del gas, tal que en una transformación adiabática se cumple que $PV^\gamma =$ cte.

PARTE 4

ELECTROMAGNETISMO

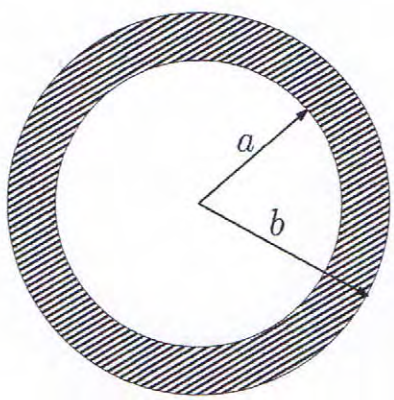
ELECTROMAGNETISMO

15 de junio de 2015

Elija y resuelva de la forma más clara posible 2 de los 3 problemas que se presentan a continuación. Por favor utilice páginas separadas para cada problema, indicando claramente el número del mismo; utilice sólo un lado de la hoja y no olvide escribir su nombre completo en cada una de ellas.

No se permite el uso de notas, libros u otro material de apoyo.

1. Considere un cascarón esférico como el que se muestra en la figura. El cascarón tiene una densidad de carga
$$\rho = \frac{k}{r^2},$$
en la region $a \leq r \leq b$, donde k es una constante y r la distancia medida desde el centro de la esfera.



a) (1.5pts) Encuentre el campo eléctrico ($\mathbf{E}(r)$) en las tres regiones: (i) $r < a$, (ii) $a < r < b$ y (iii) $r > b$.

b) (1.5pts) Encuentre el potencial electrostático $\phi(r)$.

c) (1pt) Grafique $\mathbf{E}$ y ϕ. En las gráficas etiquete r=0,a,b y el valor del campo y el potencial en esos puntos.

d) (1pt) ¿Qué clase de comportamiento debería tener la densidad de carga para que el campo en el interior del cascarón tuviese un valor distinto? Explíquelo en no más de 3 líneas.

2. (5 puntos) Explique clara pero **brevemente** por qué las siguientes afirmaciones son falsas. Dé contraejemplos si lo juzga necesario:

   a) Dada una superficie cerrada S sobre la cual el flujo del campo eléctrico es nulo, podemos asegurar que no hay cargas en su interior.

   b) En caso de que la diferencia de potencial eléctrico entre los puntos A y B sea nula, será necesario aportar energía desde el exterior del sistema para mover cualquier carga desde A hasta B.

   c) Si por un punto con vector de posición $\mathbf{r}_\mathrm{P}$ no pasa ninguna corriente y $\mathbf{E} \neq \mathbf{E}(t)$, entonces $\nabla \times \mathbf{B}(\mathbf{r}_\mathrm{P}) = \mathbf{0}$, y por lo tanto $\mathbf{B}(\mathbf{r}_\mathrm{P}) = \mathbf{0}$.

   d) Nunca podrá haber corriente circulando por un circuito sin fuentes de tensión (baterías).

3. (5 puntos) El Dr. No sale desde la Tierra en dirección a Plutón en una nave a una velocidad constante $v = c/3$. Allí pretende asesinar a la monarca del Reino Unido Isabel II, que está pasando unas vacaciones plutónicas. Sin embargo, el agente 007 James Bond consigue meterse en la nave y averiguar el malévolo plan del Dr. No. Ahora bien, lo único que el agente 007 puede hacer es apoderarse de la radio de la nave y mandar un mensaje a la Tierra para que desde allí pongan sobre aviso a los guardaespaldas de la reina en Plutón. Suponiendo que el ex-planeta está aproximadamente en reposo con respecto a la Tierra durante el viaje, y a una distancia $D = 5$ horas luz, calcule:

   a) (2.5 puntos) La distancia d medida respecto a la Tierra más allá de la cual la cadena de mensajes Bond-Tierra-Plutón llegará demasiado tarde a su destino.

   b) (2.5 puntos) Suponga que James Bond manda el mensaje cuando la nave se encuentra a $D/4$ de la Tierra. ¿A qué energía mínima (suponiendo velocidad constante) tendrá que ponerse una nave policía desde la Tierra para que, una vez recibido el mensaje de Bond, pueda llegar a Plutón para detener al Dr. No? Dé el resultado en unidades de la energía en reposo de la nave policía (E_0).

PARTE 5

MECÁNICA CLÁSICA

Posgrado de Astrofísica (UNAM)

MECÁNICA CLÁSICA

Examen final

(Duración: 1.5 horas)

Nota: Escoge dos de las tres preguntas. Responde cada pregunta en hojas separadas y pon tu nombre en cada una.

1. **Problema 1** Una partícula se mueve en una trayectoria espiral (en polares) de la forma $r = r_0 e^{a\theta}$, bajo la acción de un potencial central $V(r)$

(a) Da una expresión de $\dot{r}$ como función del momento angular L y de la coordenada radial r

(b) Escribe la energía del problema unidimensional equivalente.

(c) Imponiendo $E = 0$, halla el potencial V como función de r y del momento angular L

2. **Problema 2**

A $t = 0$ una partícula de masa "m" se desliza (sin fricción) desde la cima de un iglú de radio "R" hacía un lado del mismo (ver Figura 2).

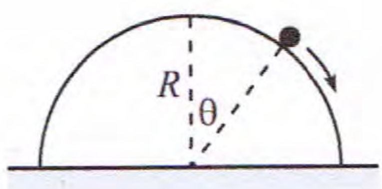


Figure 1: Problema 2.

(a) Escribe la energía cinética T, el potencial V, y el lagrangiano L de la masa m. ¿Qué magnitudes se conservan?

(b) Encuentra la fuerza de contacto entre la masa "m" y el iglú, como función de θ.

(c) ¿Cuál es el ángulo para el cual la masa m se despega del iglú?.

3. **Problema 3**

Se tiene el sistema de la figura. Una barra de masa despreciable y longitud l puede oscilar en un plano vertical. Su extremo libre está unido al centro de un disco homogéneo de masa M y radio R ($I = MR^2/2$), el cual puede rotar libremente sobre su eje, de manera que su plano siempre es paralelo a la barra. Hay gravedad. Se pide:

(a) Escribe la energía cinética del disco.

(b) Encuentra su potencial y el Lagrangiano. Escribe las ecuaciones de Euler-Lagrange.

(c) ¿Qué magnitudes se conservan?

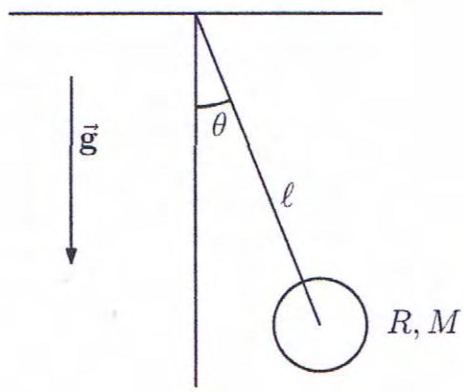


Figure 2: Problema 3.