Examen de admisión

Instrucciones:

- La duración del examen es de 1.5 horas por área de conocimiento
- Los exámenes (excepto el de astronomía general) constan de 4 problemas. Seleccione 3 problemas por áreas.
- Su calificación se basará en las **3 (tres)** mejores respuestas.
- Responder los problemas en hojas separadas escritas por una sola cara.
- Escriba su clave en cada una de las hojas utilizadas.
- No escribir información cerca de los bordes de las hojas de respuesta - dejar un par de centímetros alrededor.

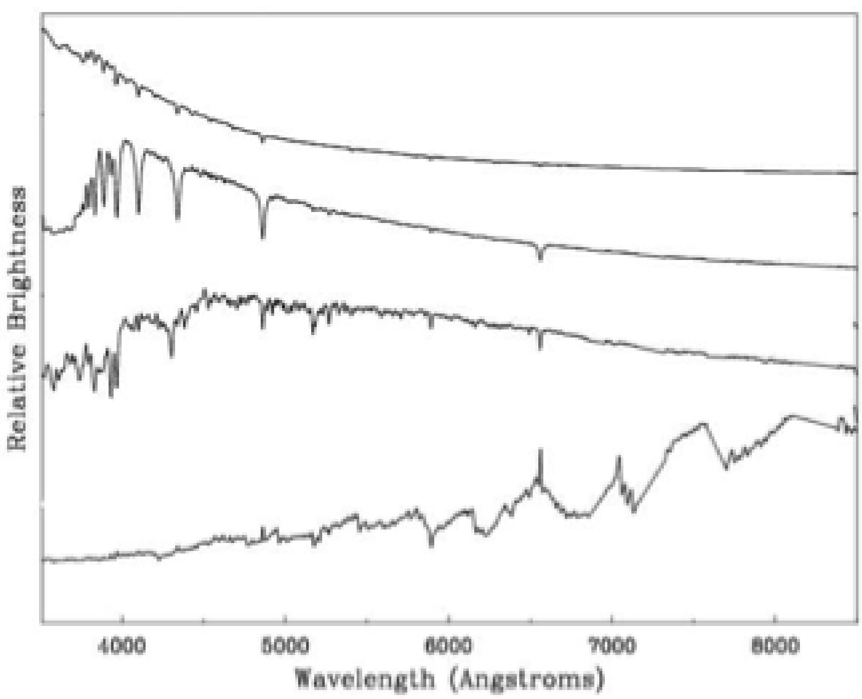
Astronomía General

Instrucciones: (i) Marque con un círculo la respuesta correcta, con pluma; (ii) Todas las anotaciones por favor al reverso de las páginas.

1. Cuales son las coordenadas ecuatoriales aproximadas del sol el día 21 de junio?
   (a) RA=06h00m00.0s; DEC=+23d30m00s ;
   (b) Dependen de las coordenadas del lugar en el qual estamos;
   (c) RA=00h00m00.0s; DEC=+00d00m00s ;
   (d) RA=+23h30m00.0s; DEC=90d00m00s ;

2. El periodo de rotación τ de una estrella binaria es 1 año, y el semi-eje mayor a de la órbita es de una unidad astronómica (AU). Si la masa de una de las estrellas es 0.5 $M_{\odot}$, ¿Cual es la masa de la compañera?
   (a) 1 Masa de Júpiter
   (b) 2.0 $M_{\odot}$
   (c) 0.5 $M_{\odot}$
   (d) 1 Masa terrestre

3. En la siguiente figura se muestran varios espectros de estrellas, indicar los tipos espectrales aproximados (de arriba para abajo)



   (a) A1,B3, K3, O5

(b) O5, B3, K3, M4
(c) O5, A1, G2, M4
(d) A1, O5, M3, K3

4. Como se llama a las estrellas que se encuentran en la zona de baja luminosidad y altas temperatura de un diagrama HR?
   (a) de Secuencia Principal
   (b) Enanas blancas
   (c) Gigantes rojas
   (d) de la rama horizontal

5. El espectro característico de una región HII consiste de:
   (a) líneas de recombinación y líneas de excitación colisionales intensas
   (b) un continuo plano sin líneas ni de absorción ni de emisión
   (c) un continuo tipo cuerpo negro, con líneas de absorción
   (d) espectro tipo estelar con líneas de emisión débiles.

6. La estrella Antares tiene un indice de color (B - V) = 1.44, y una magnitud aparente B=2.29. Se calcule su magnitud absoluta en la banda V, si la distancia de la estrella es de 20 pc.
   (a) -0.06;
   (b) +0.78;
   (c) -5.65;
   (d) -0.65;

7. Porqué se utiliza, en los diagramas H-R, el color (por ejemplo B-V) en uno de los ejes?
   (a) porqué esta directamente relacionado con la temperatura estelar;
   (b) porqué no depende de la distancia entre estrellas y observador;
   (c) porqué no depende de la extinción;
   (d) porqué esta directamente relacionado con la luminosidád estelar;

8. Las nebulosas planetarias representan:
   (a) el gas alrededor de sistemas planetarios, como por ejemplo la corona del Sistema Solar.
   (b) la etapa final de la evolución de estrellas no muy masivas
   (c) regiones donde hay formación de planetas
   (d) material perdido por planetas gigantes, como Júpiter o Saturno

9. La relación Faber-Jackson se refiera a:
   (a) una correlación entre la metalicidad y magnitudes absolutas para galaxias elípticas

(b) una correlación entre edades y dispersiones de velocidades para galaxias elípticas
(c) una relación entre la luminosidad de una galaxia espiral y su velocidad de rotación
(d) una correlación entre metalicidad y masa para galaxias espirales

10. La teoria cosmologica con más aceptación hoy en día se llama "Λ Cold Dark Matter" (Materia Oscura Fría con Constante Cosmológica). Segun esta teoria, ¿Cual de las siguientes afirmaciones es verdad?

    (a) La expansión del Universo se encuentra en una época de desaceleración
    (b) La densidad de energía del Universo está dominada por energía oscura en la actualidad
    (c) Las partículas de materia oscura se mueven a velocidades relativistas
    (d) La mayoría de la masa en supercúmulos de galaxias es en forma bariónica

11. La masa de Chandrasekhar (~ 1.4 $M_\odot$), es:

    (a) la masa mínima de una estrella en la secuencia principal
    (b) la masa máxima de una estrella de neutrones
    (c) la masa máxima de una enana blanca
    (d) la masa mínima para fusionar hidrógeno

12. En el medio interestelar hay una componente que se conoce como Medio Ionizado templado que tiene una temperatura típica de $\sim 10^4$ K. A que tipo de objeto se le atribuye la producción de esta componente?

    (a) Estrellas OB
    (b) Remanentes de Supernova
    (c) Rayos Cósmicos
    (d) Enanas Marrón

13. La ley de distribución de brillos Exponenciales, que se aplica a galaxias tipo disco, describe para estas galaxias

    (a) la masa de las galaxias
    (b) la existencia de materia oscura
    (c) el brillo superficial como función de la distancia al centro
    (d) la rotación galáctica

14. Un par de estrellas binarias tiene magnitudes aparentes $m_1 = 5$ y $m_2 = 6$. Cuál es la magnitud observada del par?

    (a) 3.4 mag
    (b) 4.6 mag
    (c) 5.4 mag

(d) 11.0 mag

15. La diferencia entre los valores de la magnitud bolométrica aparente m de una estrella y su magnitud bolométrica absoluta M es m-M = 15, por lo que la distancia a la estrella es

    (a) d=10 pc
    (b) d=100 pc
    (c) d=1000 pc
    (d) d=10000 pc

16. Determina la distancia a la galaxia M104, el Sombrero, tomando en cuenta que su módulo de distancia es m-M = 31.5

    (a) 150 kpc
    (b) 830 kpc
    (c) 6.9 Mpc
    (d) 20 Mpc

17. Considere un sistema binario elipsante de estrellas iguales cuyas componentes se mueven en órbitas circulares. El sistema presenta un periodo de 3 meses y una semi-amplitud de velocidades de 150 km/s. Determina el radio de las órbitas individuales y la masa total del sistema.

    (a) 2.5AU, $10M_\odot$
    (b) 1.25AU, $31.2M_\odot$
    (c) 0.25AU, $22.5M_\odot$
    (d) 2.5AU, $22.5M_\odot$

18. La secuencia principal es la fase más prolongada de la vida de las estrellas y corresponde a cuando en el centro de la estrella está ocurriendo:

    (a) la quema de Hidrógeno en Helio.
    (b) la quema de Helio en Carbono.
    (c) la quema de elementos mas pesados que el Hidrógeno y el Helio.
    (d) la quema de Hidrógeno y de Helio.

19. Cual de las siguientes afirmaciones es falsa:

    (a) Las galaxias espirales están soportadas principalmente por rotación
    (b) Las galaxias elípticas tienen poblaciones estelares viejas principalmente
    (c) Las galaxias espirales no presentan mucho gas ni formación estelar intensa
    (d) Las galaxias elípticas se parecen a bulbos sin disco

20. Si la luz de un quasar varía en una escala de tiempo de 100 días ¿Cual es el tamaño de la region de emisión?

(a) 10^7 km

(b) 100 UA

(c) 0.1 parsec

(d) 100 parsec

Mecánica clásica

Problema 1

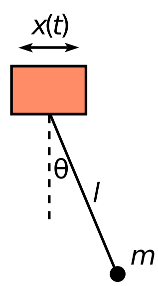
1. Encontrar una expresión para la velocidad de escape desde un planeta de radio R y masa M como función del radio y de la densidad promedio del planeta.

2. Suponiendo que un humano brinca hasta una altura h, encontrar una expresión para el tamaño R_P de un planeta esférico del que un humano pueda escaparse con un brinco (i.e. encontrar R_P como función del radio de la Tierra R_T y h). Asumir que la velocidad inicial del brinco sea aproximadamente la misma en la tierra y en el otro planeta y que la densidad del planeta sea la misma que la de la tierra.

3. Estimar el tamaño del planeta (tomar $R_T = 6400$ km).

Problema 2

Un pendulo de masa m es colgado a una distancia l de un soporte que oscila horizontalmente con una posición dada por $x(t) = A\cos(\omega t)$. Encontrar la ecuación de movimiento del ángulo θ del pendulo.



Problema 3

1. Desde la definición de momento angular, demonstrar que la torca es $\tau = \vec{r} \times \vec{F}$.

2. Una partícula de masa m está sujeta a dos fuerzas: una fuerza central f_1 y una fuerza friccional f_2, con $\vec{r}$ el vector de posición.

$$\begin{aligned} \vec{f_1} &= F(r)\,\hat{r} \\ \vec{f_2} &= -b\vec{v}, \qquad b > 0 \end{aligned} \tag{1}$$

   donde F(r) es una función continua de r, b es constante y $\vec{v}$ es la velocidad. Si la partícula tiene inicialmente un momento angular $\vec{L}(t=0) = L_0$, encuentre el momento angular a todo tiempo $\vec{L}(t)$.

Problema 4

Considere una partícula de masa m en el potencial central $\phi(r, z)$, en coordenadas cilindricas. ϕ es un modelo simple para la distribución de masa en nuestra galaxia, con el plano $z = 0$ como el plano medio de simetria, y $r = 0$ el centro galactico.

1. Escriba, usando las ecuaciones de Lagrange, las ecuaciones de movimiento para la partícula.
2. Demuestre la conservación de momento angular. A que simetría corresponde la cantidad conservada?
3. Encuentre la condicion para orbitas circulares estables en la posicion solar $r_\odot$ y la frecuencia de pequenas oscilaciones radiales en torno a la orbita circular.

Física Térmica

Problema 1

La ecuación de estado y la energía interna (ley de Stefan-Boltzmann) para un gas de fotones en equilibrio termodinámico están dadas respectivamente por $P = (1/3)aT^4$ y $U(T,V) = aT^4V$, donde P es la presión de radiación, a es la "constante de radiación" que depende de otras constantes fundamentales, T es la temperatura y V es el volumen. Usando la primera ley de la termodinámica, demuestre que la ecuación de estado para un proceso adiabático se puede expresar como $PV^{4/3} = K$, donde K es una constante.

Problema 2

Un sistema de dos niveles energéticos E_0 y E_1 está poblado por N partículas a la temperatura T. Las partículas ocupan los niveles energéticos según la distribución de Boltzmann.

1. Derivar una expresión para la energía promedio por partícula.
2. Calcular la energía promedio de las partículas en los límites $T \to 0$ y $T \to \infty$.
3. Calcular la temperatura de un gas de hidrógeno en el que hay diez veces mas atómos en el estado base que en el primer estado excitado (la diferencia de energía entre el primer estado excitado y el estado base del hidrógeno es de 10.2 eV, los pesos estadísticos son $g_0 = 2$, $g_1 = 8$, y 1 eV/$k_B = 1.16 \times 10^4$ K)

Problema 3

Un gas ideal (constituido por N partículas) está en un estado de equilibrio en el interior de un cilindro de paredes adiabáticas, de volumen V_i y temperatura T_i. Un pistón, también adiabático, ejerce sobre el gas una presión p_i. De una sola vez, se agrega al pistón una masa m que hace que la presión ejercida sobre el gas sea $p_f > p_i$ y el volumen se reduzca a V_f.

1. Encuentre una ecuación para la variación en la energía interna del gas
2. Encontrar una expresión para la temperatura final del gas T_f (asumir que el indice adiabático es $\gamma = 5/3$).
3. Considerando el balance de fuerzas, encuentre la presión de equilibrio del gas P_e al final de la compresión (siendo A la sección eficaz del cilindro).

Problema 4

1. Que dependencia tiene la función de Planck para la intensidad de un cuerpo negro de la frecuencia ν (escribir la expresión)?
2. A partir de la función de Planck, encontrar la dependencia de la temperatura en la ley de Stefan-Boltzmann $u(T) \propto T^4$, siendo u la densidad de energía. Nota: no es necesario encontrar la constante de proporcionalidad.

Física Cuántica

Información útil:
$h = 6.63 \times 10^{-34}\,\mathrm{J\,s}$
$1\,\mathrm{eV} = 1.602 \times 10^{-19}\,\mathrm{J}$
$c = 3 \times 10^{8}\,\mathrm{m\,s^{-1}}$
$1\,\mathrm{Rydberg} = 13.6\,\mathrm{eV}$
la masa del electrón es $m_e = 9.11 \times 10^{-31}\,\mathrm{kg}$
la masa del protón es $m_p = 1.67 \times 10^{-27}\,\mathrm{kg}$

Problema 1

Encuentre las energías y funciones de onda de una partícula que se mueve en tres dimensiones en un pozo de potencial esférico infinito

$$V(r) = \begin{cases} 0, & \text{si } r < a \\ \infty, & \text{si } r > a \end{cases}$$

con un momento angular $\ell = 0$. Recuerde que en coordenadas esféricas $r\psi = 0$ en $r = 0$ y la ecuación de Schrödinger es

$$\left[-\frac{\hbar^2}{2m}\frac{1}{r}\frac{\partial^2}{\partial r^2}r + \frac{L^2}{2mr^2} + V(r)\right]\psi(r,\theta,\phi) = E\psi(r,\theta,\phi), \text{ e } \int \sin^2 x\,dx = \frac{x}{2} - \frac{1}{4}\sin 2x$$

Problema 2

a) Explique brevemente el modelo de átomo de Bohr. ¿Qué es objetable en este modelo?

b) Calcule la energía de ionización de un átomo de hidógeno en el estado de mínima energía ($n = 1$), y compárela con el valor experimental de 13.598 eV.

c) Suponga que el modelo de Bohr se pueda aplicar a un átomo de helio con sus dos electrones en el estado de mínima energía, y suponga que la energía de repulsión entre los electrones es despreciable. Calcule la energía de ionización para ese estado, y comparela con el valor experimental. ¿Algún comentario?

Problema 3

La luz ultravioleta de longitud de onda $\lambda = 3500\,\text{Å}$ incide sobre una superficie de potasio. Se observa que la energía máxima de los fotones emitidos es de $1.6\,\mathrm{eV}$. Calcule la función de trabajo del potasio, despreciando correcciones térmicas y la longitud de onda umbral.

Problema 4

Considere un sistema con un espacio de estado tridimensional. Suponiendo una base ortonormal del espacio de estado, el hamiltoniano es dado por

$$H = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} \text{ y otro observable es } A = \begin{pmatrix} 5 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & i \\ 0 & -i & 2 \end{pmatrix}.$$

a) ¿Cuáles son las energías posibles de este sistema?

b) Si el estado del sistema es $|\psi\rangle = \frac{1}{\sqrt{3}}\begin{pmatrix} i \\ -i \\ i \end{pmatrix}$, ¿cuáles valores tienen $\langle H\rangle$, $\langle H^2\rangle$ y $\Delta h = \sqrt{\langle H^2\rangle - \langle H\rangle^2}$? Dado este estado, ¿cuál es el valor más probable de la energía?

c) Si la energía del sistema es $E = 1$, ¿cuáles son los posibles resultados de una medición de A?

d) ¿Cuáles son las probabilidades de obtener cada resultado de A si primero medimos $E = 1$?

e) ¿Cuáles combinaciones de H y A permiten conformar un conjunto completo de observables conmutantes (CCOC)?

Electrodinámica clásica

Problema 1

Encuentra el campo eléctrico de una esfera sólida de radio R y una carga total q. Usa la Ley de Gauss para $r > R$.

Problema 2

Encuentra el campo magnético a una distancia s de una cable delgado y largo que lleva una corriente I.

Problema 3

A partir de las cuatro ecuaciones de la teoría electromagnética de Maxwell, deriva la ecuación de onda para el campo eléctrico.

Problema 4

Asume que la densidad de corriente de un cable es proporcional a la distancia de su eje, $J = ks$, donde s es la distancia y k es una constante. Además a es el radio del cable. Encuentra la corriente total en el cable.