Examen de admisión de física térmica
Mayo 2020

El examen debe responderse en 1 hora. La máxima calificación se obtiene contestando completamente al único problema (2/3 de la calificación) y a una (1/3) de las dos preguntas disponibles. Se tomará la pregunta que esté mejor contestada.

Problema 1)

Considere un sistema cerrado en el cual se satisface que:

$$dU = TdS - PdV. \tag{1}$$

- a) Usando la ecuación 1 muestre que:

$$\left(\frac{\partial S}{\partial T}\right)_V = \frac{1}{T}\left(\frac{\partial U}{\partial T}\right)_V \tag{2}$$

- b) Asuma que su sistema es radiación electromagnética que emite como cuerpo negro. Utilizando el inciso anterior, exprese a la entropía en función de la temperatura y el volumen.
- c) Suponga que su sistema experimentará una expansión adiabática reversible, incrementando 3 veces su volumen. Si la temperatura inicial era de 10K, ¿cuál es su temperatura final?
- d) La radiación térmica de fondo del Universo (un gas de fotones que actualmente tiene una temperatura de 3 K) se desacopló (dejó de estar relacionada) de la temperatura de la materia cuando ambas eran de 3000 K. Suponga que se puede modelar la expansión de la radiación del Universo como el proceso arriba discutido. Calcule cuál era el radio del Universo al desacoplarse comparado con lo que tenemos al día de hoy. ¿Si el radio del Universo se ha incrementado linealmente con el tiempo, en que fracción de la edad actual del Universo se llevó a cabo el desacoplamiento?

Pregunta 1)

Enuncie el *principio de equipartición de la energía*. Si usted tiene un sistema a alta temperatura (T) en equilibrio estadístico formado por moléculas diatómicas, ¿cuál será la energía térmica promedio de las partículas? ¿Qué pasa cuando los niveles rotacionales y vibracionales no alcanzan a estar poblados?

Pregunta 2) Plantee y discuta la validez de la primera y segunda *leyes de la termodinámica* para una máquina refrigerante.

Respuesta Problema 1

a) Podemos escribir,

$$dU = \left(\frac{\partial U}{\partial T}\right)_V dT + \left(\frac{\partial U}{\partial V}\right)_T dV \tag{3}$$

Con lo que,

$$TdS = dU + PdV = \left[\left(\frac{\partial U}{\partial T}\right)_V dT + \left(\frac{\partial U}{\partial V}\right)_T dV\right] + PdV \tag{4}$$

Por otra parte,

$$dS = \left(\frac{\partial S}{\partial T}\right)_V dT + \left(\frac{\partial S}{\partial V}\right)_T dV \tag{5}$$

De 4 y 5,

$$\left(\frac{\partial S}{\partial T}\right)_V = \frac{1}{T}\left(\frac{\partial U}{\partial T}\right)_V \tag{6}$$

b) La densidad de energía esta dada por: $u = AT^4$, con A una constante. Podemos escribir la energía del sistema como

$$U = \mathcal{C}VT^4 \tag{7}$$

Donde $\mathcal{C}$ es una constante. De 6 y 7,

$$\frac{\partial S}{\partial T} = 4\mathcal{C}VT^2 \tag{8}$$

Con lo que

$$S = \mathcal{D}_1 VT^3 + \mathcal{D}_2 \tag{9}$$

Con $\mathcal{D}_1$ y $\mathcal{D}_2$ constantes.

c) Debido a que el proceso es adiabático y reversible, la entropía no cambia. Por tanto, $S_1 = S_2$. Y

$$V_1 T_1^3 = V_2 T_2^3 \tag{10}$$

Si, $V_2 = 3V_1$, entonces. $T_1^3 = 3T_2^3$. Y $T_2 = \frac{T_1}{3^{1/3}} = \frac{10K}{3^{1/3}} = 6.93$ K.

d) Podemos aplicar el resultado anterior a la expansión del Universo. $T_1 = 3000$ K, $T_2 = 3$ K. Considerando simetría esférica, la ecuación (10) queda:

$$R_1 = R_2 \frac{T_2}{T_1}. \tag{11}$$

Por lo que el radio inicial es $R_1 = 0.001 R_2$.

Similarmente, si el radio del Universo ha incrementado linealmente con el tiempo, i.e., $R(t) \propto t$, el desacoplamiento entre materia y radiación ocurrió cuando la edad del universo era 10^{-3} de su edad actual.

Respuesta Pregunta 1

La energía se distribuye en promedio de igual manera entre todos los grados de libertad. Cada cada término cuadrático en la expresión total de la energía contribuye a la energía promedio con un $\frac{1}{2}kT$.

En este caso, para la molécula diatómica:

- Translación:
$E_{translacion} = \frac{3}{2}kT$. La energía total, E = $\frac{1}{2}mv_x^2 + \frac{1}{2}mv_y^2 + \frac{1}{2}mv_z^2$

- Rotación:
$E_{rotacional} = kT$. La energía total, E = $\frac{1}{2}I\omega_x^2 + \frac{1}{2}I\omega_y^2$

- Vibración:
$E_{vibracional} = kT$. La energía total, E = $\frac{1}{2}mv^2 + \frac{1}{2}Kx^2$

Por tanto, la energía promedio será $\frac{7}{2}kT$.

Si los niveles rotacionales y vibracionales no están poblados entonces para esos niveles no es apropiado considerarlos y la energía promedio sería solo $\frac{3}{2}kT$. Esto puede ocurrir a bajas densidades (pocas colisiones que transfieran energía a esos niveles) y temperaturas.

Respuesta Pregunta 2

- La Primera Ley de la termodinámica se cumple cabalmente siguiendo:

$$\Delta U = Q - W$$

donde Q es el calor total transferido *al* sistema durante W es el trabajo hecho *por* el sistema. Si la máquina funciona con procesos cíclicos y está bien aislada también se cumple con que $\Delta U = 0$.

En terminos del calor transferido del reservorio frío al sistema Q_{cold}, del calor transferido del sistema al reservorio caliente Q_{hot} y del trabajo externo hecho sobre el sistema W_{ext}:

$$Q = Q_{\text{cold}} - Q_{\text{hot}},$$
$$W = -W_{\text{ext}},$$

por lo que la máquina refrigerante cíclica aislada cumple con:

$$W_{\text{ext}} = Q_{\text{hot}} - Q_{\text{cold}},$$

es decir, el calor neto extraído del sistema es igual al trabajo externo hecho sobre el sistema.

- Respecto a la Segunda Ley, puede verse fácilmente que el enunciado de Clausius se cumple: “el calor no puede fluír de un cuerpo más frío a uno más caliente, sin que algún otro cambio ocurra simultáneamente”, dado que en el caso de un refrigerador tiene que inyectarse un trabajo externo al sistema.

Nota: también puede mostrarse que el regrigerador ideal (donde todo el calor extraído es liberado sin necesidad de meter trabajo) no existe porque $\Delta S < 0$.

UNAM POSGRADO Astrofísica

POSGRADO EN ASTROFÍSICA

Examen de Admisión
para ingresar al semestre 2021-I
Fecha de examen: lunes 25 de mayo 2020
12:30–13:30

Electromagnetismo

INSTRUCCIONES

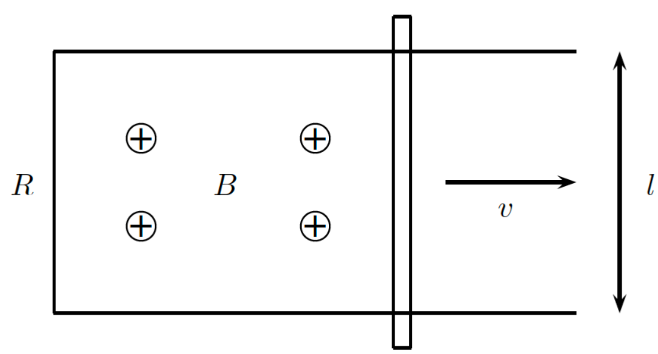
- Duración del examen: 1 hora.
- El examen consta de 3 problemas que deberán resolver de la manera más clara, limpia y concisa posible.
- En promedio, tendrán 20 minutos por problema.
- Responder los problemas en hojas separadas escritas por una sola cara.
- **No olvidar escribir su clave en cada una de las hojas.**
- **Al terminar el examen:**
  1. Digitalizar sus respuestas (por ejemplo, tomando una foto con el celular).
  2. Mandar la versión digitalizada a `heike@astro.unam.mx`

1. Una nave espacial paso al lado de la tierra a una velocidad $v = 0.8c$ exactamente a las 12:00 pm.

- Cuando el reloj de la nave indica que han transcurrido 30 minutos desde que pasó al lado de la tierra, ¿qué hora indicarán los relojes en la tierra?
- ¿A qué distancia está la nave de la tierra en ese preciso instante?
- En ese momento los astronautas envían una comunicación de radio a la tierra, ¿a qué horas se recibe en la tierra esta comunicación?
- En cuanto ésta se recibe se contesta hacia la nave, ¿a qué hora de la nave se recibe esta comunicación?

2. Una partícula de carga $+q$ se está moviendo con velocidad $\mathbf{v} = v\hat{\imath}$ paralela a un alambre y a una distancia r de éste. El alambre tiene una densidad de carga lineal de $+\lambda$ y además lleva una corriente $\mathbf{I} = I\hat{\imath}$. ¿Para qué valor de v (magnitud de la velocidad) desaparece la fuerza electromagnética sobre la partícula?

3. Una barra conductora móvil cierra el circuito que se muestra en la figura. Si la barra se desliza a una rapidez $v = 4$ m s^{-1}, $l = 1.5$ m, la resistencia R del circuito es de 12 Ω, y el campo magnético (entrando a la página) tiene una magnitud $B = 5$ T, determinar la magnitud de la potencia inducida P y la dirección de la corriente inducida. (Considerar que $P = VI = V^2/R$.)



Clave: ___________________

POSGRADO EN ASTROFÍSICA: UNAM

Contestar todas las 10 preguntas de opción múltiple.

Tiempo permitido: 1 hora.

Encierre la respuesta correcta en esta hoja o use una hoja separada.

1.	(a)	(b)	(c)	(d)	(e)
2.	(a)	(b)	(c)	(d)	(e)
3.	(a)	(b)	(c)	(d)	(e)
4.	(a)	(b)	(c)	(d)	(e)
5.	(a)	(b)	(c)	(d)	(e)
6.	(a)	(b)	(c)	(d)	(e)
7.	(a)	(b)	(c)	(d)	(e)
8.	(a)	(b)	(c)	(d)	(e)
9.	(a)	(b)	(c)	(d)	(e)
10.	(a)	(b)	(c)	(d)	(e)

Al terminar el examen:

(1) Asegurarse haber incluido su clave en la hoja de respuestas

(2) Digitalizar sus respuestas (por ejemplo, tomando una foto con el celular)

(3) Mandar la versión digitalizada a `laurent@astro.unam.mx`

1. Dos estrellas, A y B, tienen luminosidades bolométricas iguales. La estrella A tiene un radio $R_\mathrm{A} = 10\,R_\odot$ y el pico de su espectro de flujo F_λ ocurre a $\lambda = 150\,\mathrm{nm}$. Para la estrella B, este pico ocurre a $\lambda = 1.5\,\mu\mathrm{m}$. Si el espectro de cada estrella se aproxima por una función Planck a su temperatura efectiva, el radio de la estrella B es:

   (a) $R_\mathrm{B} = 10^5\,R_\odot$

   (b) $R_\mathrm{B} = 1\,R_\odot$

   (c) $R_\mathrm{B} = 0.1\,R_\odot$

   (d) $R_\mathrm{B} = 100\,R_\odot$

   (e) $R_\mathrm{B} = 1000\,R_\odot$

2. Las galaxias espirales cumplen relaciones de escala entre sus observables. ¿Cual de estas relaciones se usa para determinar la distancia entre estas galaxias y nosotros?

   (a) La relación entre la masa estelar y la cantidad de metales en el gas ionizado de la galaxia.

   (b) La relación entre la luminosidad total y la velocidad rotacional del disco de la galaxia.

   (c) La relación entre la masa estelar y la tasa de formación estelar.

   (d) La relación entre la masa de gas y la tasa de formacion estelar.

   (e) Todas las anteriores

3. La estrella Sirio B tiene una magnitud bolométrica de 10 mag. Su temperatura efectiva es 2 veces la temperatura solar. La magnitud bolométrica del Sol es 4.74. Con estos datos, se obtiene que la luminosidad bolométrica de Sirio B, en unidades de luminosidad solar, es

   (a) $7.87\,L_{\odot}$
   (b) $7.87 \times 10^{-1}\,L_{\odot}$
   (c) $7.87 \times 10^{-3}\,L_{\odot}$
   (d) $2\,L_{\odot}$
   (e) $10\,L_{\odot}$

4. Un sistema binario contiene una estrella de magnitud aparente -1.5 y una estrella de magnitud aparente 8.3. La magnitud aparente aproximada del sistema total es:

   (a) -1.5 mag

   (b) 6.8 mag

   (c) 8.3 mag

   (d) no se puede calcular

   (e) el sistema no puede existir

5. El ancho intrínseco RMS de una línea a longitud de onda de 5000 Å, en una estrella K, es 0.5 Å. En una galaxia elíptica, este ancho es de 3 Å. Entonces la dispersión de velocidades de las estrellas en la galaxia es

   (a) $30\,\mathrm{km\,s^{-1}}$
   (b) $180\,\mathrm{km\,s^{-1}}$
   (c) $500\,\mathrm{km\,s^{-1}}$
   (d) El ancho de la línea no es producido por dispersión de velocidades
   (e) la galaxia rota a $220\,\mathrm{km\,s^{-1}}$

6. ¿Qué parte de la Vía Láctea tiene mayor velocidad angular? Suponga que la curva de rotación sube linealmente con el radio, para luego tener una transición suave y hacerse constante a partir de un radio R_0.

   (a) Las partes centrales, donde la curva de rotación es lineal.

   (b) En R_0, donde la velocidad alcanza su valor máximo.

   (c) En el límite externo del disco, donde la órbita es máxima.

   (d) En el halo estelar, donde una partícula prueba sentiría la masa completa de la Galaxia.

   (e) Todo tiene la misma velocidad angular, por conservación de momento angular.

7. Considere una galaxia con una distribución de densidad de masa $\rho \propto r^{-\alpha}$. La curva de rotación, i.e. la velocidad de una partícula de prueba en órbita circular, sigue:

   (a) $v =$ cte.

   (b) $v \propto r^{(3-\alpha)/2}$

   (c) $v \propto r^{3-\alpha}$

   (d) $v \propto r^{1-\alpha/2}$

   (e) $v \propto r^{-\alpha/2}$

8. A una estrella se le han determinado las siguientes características: una temperatura efectiva de 3.9×10^4 K y un diámentro de 3.89×10^{-10} pc. (A) Determine la luminosidad de la estrella.

   Según la luminosidad calculada, la estrella se puede encontrar en un diagrama H-R en la zona de secuencia principal, (B) ¿es esto verdad?.

   (a) (A) $\approx 150\, L_\odot$ (B) = verdadero

   (b) (A) $\approx 15\, L_\odot$ (B) = verdadero

   (c) (A) $\approx 15\, L_\odot$ (B) = falso

   (d) (A) $\approx 0.15\, L_\odot$ (B) = falso

   (e) (A) $\approx 0.15\, L_\odot$ (B) = verdadero

9. Uno de los cuásares más cercanos conocido es denominados 3C 273, su redshift determinado es de 0.158 implicando una distancia de 749 Mpc. (A) ¿Cuál es el valor de la constante de Hubble utilizado para determinar esta distancia?, (B) ¿Cuál sería la velocidad de recesión que tendría 3C 273 con la constante de Hubble determinada?

   (a) (A) $H_0 \approx 73.25\,\mathrm{km\,s^{-1}\,Mpc^{-1}}$ (B) $V \approx 2.44 \times 10^3\,\mathrm{km\,s^{-1}}$
   (b) (A) $H_0 \approx 63.25\,\mathrm{km\,s^{-1}\,Mpc^{-1}}$ (B) $V \approx 4.73 \times 10^4\,\mathrm{km\,s^{-1}}$
   (c) (A) $H_0 \approx 73.25\,\mathrm{km\,s^{-1}\,Mpc^{-1}}$ (B) $V \approx 2.44 \times 10^4\,\mathrm{km\,s^{-1}}$
   (d) (A) $H_0 \approx 63.25\,\mathrm{km\,s^{-1}\,Mpc^{-1}}$ (B) $V \approx 4.73 \times 10^3\,\mathrm{km\,s^{-1}}$
   (e) ninguna de las anteriores

10. Las variables cefeidas permiten conocer la distancia a galaxias cercanas porque

    (a) tienen una magnitud absoluta constante

    (b) tienen una luminosidad absoluta constante

    (c) cumplen una relación periodo-luminosidad

    (d) las variables cefeidas son muy débiles y no se usan para determinar distancia

    (e) el radio de la estrella es constante

POSGRADO EN ASTROFÍSICA

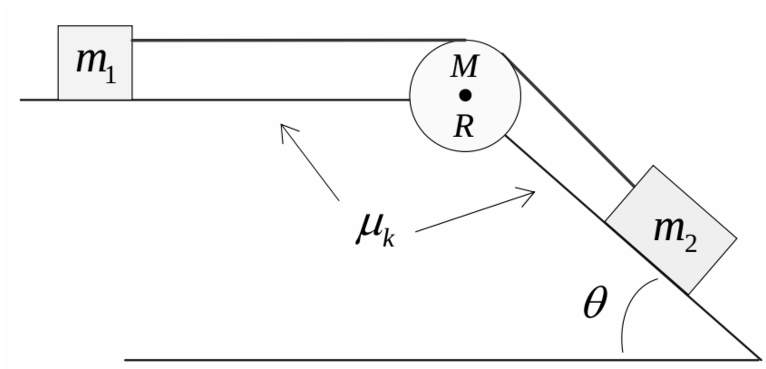
Examen de Admisión
para ingresar al semestre 2021-I
Fecha de examen: lunes 25 de mayo 2020
11:00–12:00

Mecánica Clásica

INSTRUCCIONES

- Duración del examen: 1 hora.
- El examen consta de 3 problemas.
- Su calificación se basará en las 2 mejores respuestas.
- Responder los problemas en hojas separadas escritas por una sola cara.
- **No olvidar escribir su clave en cada una de las hojas.**
- **Al terminar el examen:**
  1. Digitalizar sus respuestas (por ejemplo, tomando una foto con el celular).
  2. Mandar la versión digitalizada a `laurent@astro.unam.mx`

1. Dos bloques de masa m_1 y m_2 están unidos por una cuerda que pasa sobre una polea de masa M, radio R y momento de inercia $I = MR^2/2$. Los bloques se mueven sobre un plano inclinado (hacia la derecha) cuyo coeficiente de fricción es μ_k. Escriba las 3 ecuaciones que describen el movimiento del sistema.



(Sugerencia: A partir de la Segunda Ley de Newton se puede obtener la ecuación de movimiento para cada componente del sistema, una para cada bloque y una más para la polea. Considere además que el torque neto sobre la polea depende de la tensión ejercida en cada lado de la cuerda.)

2. Suponga que $\Phi = \Phi(r, z)$ es el potencial gravitacional de una galaxia como la Vía Láctea, y que el sistema es conservativo. Use cantidades por unidad de masa (ejemplo, energía cinética $K = mv^2/2 \to v^2/2$) y coordenadas cilíndricas (r, θ, z).
Un cúmulo globular (idealizado como un punto masa) se encuentra a una distancia grande del centro galáctico en el potencial Φ.

(i) Dada la forma funcional de Φ, ¿qué integrales de movimiento (cantidades conservadas a lo largo de su órbita) existen? Considere las simetrías del potencial.

(ii) A partir de las ecuaciones de movimiento en coordenadas cilíndricas, encuentre una expresión para la componente z del momento angular $\bar{L}$. ¿Qué componentes de $\bar{L}$ se conservan? Demuestre la conservación.

(iii) Si la distribución de cúmulos globulares en la galaxia es esférica, ¿qué nos dice esto respecto a su edad? Dada la forma de Φ y las integrales de movimiento, ¿qué características deberían tener las órbitas que pasan cerca del centro galáctico? Considere r y v en el tiempo.

3. Una partícula de masa m está restringida a moverse a lo largo de la curva parabólica $z = ax^2$, donde a es una constante, y la aceleración de la gravedad es g en dirección $-\hat{z}$.

(a) Determine el lagrangiano de la partícula y escriba la ecuación de Lagrange correspondiente.

(b) Para x pequeña, ¿en qué rango de valores de a se obtiene un movimiento de oscilador armónico simple?

(c) ¿Cuál es la frecuencia de las oscilaciones en este caso?

1 Mecánica Cuántica

Instrucciones

- Duración del examen: 1.0 horas
- El examen consta de 4 preguntas.
- Conteste el mayor nńumero de preguntas posible. Su calificación dependerá tanto de su desempeño en este examen escrito como en su defensa oral de sus respuestas.
- Responder los problemas en hojas separadas y numeradas, escritas por una sola cara.
- No escribir información demasiado cerca de los bordes de las hojas de respuesta - dejar un par de centímetros alrededor.
- **No olvidar escribir su clave en cada una de las hojas.**
- **Al terminar el examen:**
  1. Digitalizar sus respuestas (por ejemplo, tomando una foto con el celular).
  2. Mandar la versión digitalizada a `laurent@astro.unam.mx`

Información útil:
$h = 6.63 \times 10^{-34}\,\mathrm{J\,s}$
$1\,\mathrm{eV} = 1.602 \times 10^{-19}\,\mathrm{J}$
$c = 3 \times 10^{8}\,\mathrm{m\,s^{-1}}$
$1\,\mathrm{Rydberg} = 13.6\,\mathrm{eV}$
la masa del electrón es $m_e = 9.11 \times 10^{-31}\,\mathrm{kg}$
la masa del protón es $m_p = 1.67 \times 10^{-27}\,\mathrm{kg}$
la unidad de masa atómica es $m_a = 1.66 \times 10^{-27}\,\mathrm{kg}$

1. La molécula de ^{12}CO está formada por un átomo de ^{12}C (6 protones y 6 neutrones), y un átomo de O (8 protones y 8 neutrones). Suponga que podemos describir las energías de rotación de la molécula como dos masas que rotan en el espacio mientras premanecen unidas a una distancia constante de $r = 1.127\,\text{Å}$. Recuerde que en coordenadas esféricas la ecuación de onda es:

$$\left[-\frac{\hbar^2}{2m}\frac{1}{r}\frac{\partial^2}{\partial r^2}r + \frac{\hat{L}^2}{2mr^2} + V(r)\right]\psi(r,\theta,\phi) = E\psi(r,\theta,\phi) \tag{1}$$

   a) Encuentre los eigenvalores de la energía para la molécula de ^{12}CO. ¿Qué masa m se debe usar en la ecuación de onda?

   b) Estime la frecuencia de la línea espectral en la transición entre el estado de energía con $l = 0$ y el estado $l' = l + 1 = 1$.

   c) Suponga que observa con un radiotelescopio que permite distinguir dos líneas espectrales si están separadas por más de 30 kHz. ¿Será posible distinguir con este radiotelescopio la línea del ^{13}CO (un neutrón extra en el C) de la línea del ^{12}CO? Suponga que la distancia entre el ^{13}C y el O es la misma que para el ^{12}CO.

2. **a)** Suponga que dos observables $\hat{A}$ y $\hat{B}$ que no dependen explícitamente del tiempo conmutan con un hamiltoniano $\mathcal{H}$: $[\hat{A}, \mathcal{H}] = 0$, $[\hat{B}, \mathcal{H}] = 0$. Muestre que $\mathcal{H}$ conmuta con $[\hat{A}, \hat{B}]$

   b) Suponga que las observables anteriores no conmutan: $[\hat{A}, \hat{B}] \neq 0$. Muestre que en este caso los eigenestados de $\mathcal{H}$ son degenerados casi siempre. ¿Hay excepciones? Dé ejemplos.
   (*Ayuda:* Calcule $\left\langle m \middle| \mathcal{H}[\hat{A}, \hat{B}] \middle| n \right\rangle$.)

3. Considere una partícula de masa m sin spin en el siguiente pozo tridimensional:

$$V(x,y,z) = \begin{cases} \frac{1}{2}m\omega z^2 & 0 < x < a,\ 0 < y < a \\ \infty & \text{para cualquier otro valor de } x,\ y \end{cases} \tag{2}$$

   a) Determine las energías y las eigenfunciones para esta partícula.

   b) ¿Cuál es la energía del estado base?

   c) Si $\hbar\omega > 5\pi^2\hbar^2/2ma^2$, ¿cuál es el primer estado excitado, cuál es su energía y cuán degenerado es este estado?

4. La función de onda de un oscilador armónico al tiempo $t = 0$ es $\psi(x, 0) = \sqrt{2}A\phi_1 + (1/\sqrt{2})A\phi_2 + A\phi_3$, donde ϕ_i es el i-esimo estado estacionario del problema del oscilador armónico y A es una constante.

   a) ¿Cuál debe ser el valor de A para que ψ sea una función de onda?

   b) Calcule la función de onda $\psi(x,t)$ para todo valor t.

   c) Calcule el valor de $\langle x \rangle$ para $t = 0$.

   d) Calcule la $\langle E \rangle$ a los tiempos $t = 0$, $t = \pi/\omega$ y $t = 2\pi/\omega$.